



# Filtration Relative, l' Idéal de Bernstein et ses pentes

Philippe Maisonobe

## ► To cite this version:

Philippe Maisonobe. Filtration Relative, l' Idéal de Bernstein et ses pentes. Rendiconti del Seminario Matematico, A paraître. hal-01285562v2

**HAL Id: hal-01285562**

**<https://hal.science/hal-01285562v2>**

Submitted on 1 Jun 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Filtration Relative, l'Idéal de Bernstein et ses pentes

Ph. Maisonobe  
Université de Nice Sophia Antipolis  
Laboratoire Jean-Alexandre Dieudonné  
Unité Mixte de Recherche du CNRS 7351  
Parc Valrose, F-06108 Nice Cedex 2

22 mars 2016

# Introduction

Soit  $f_i : X \rightarrow \mathbf{C}$ , pour  $i$  entier compris entre 1 et  $p$ , des fonctions analytiques définies au voisinage d'un compact  $K$  d'une variété analytique complexe  $X$ . Notons  $F$  le produit des  $f_i$  et posons si  $\phi : X \rightarrow \mathbf{C}$  désigne une fonction  $C^\infty$  à support compact dans  $K$  :

$$I_\phi(s_1, \dots, s_p) = \int_X |f_1(x)|^{s_1} \dots |f_p(x)|^{s_p} \phi(x) dx \wedge d\bar{x} .$$

Tout comme dans le cas  $p = 1$ , en utilisant le théorème de résolution des singularités d'H. Hironaka, on peut montrer que  $I_\phi(s_1, \dots, s_p)$  qui est une fonction définie à priori pour  $\text{Re } s_i > 0$  se prolonge en fonction méromorphe avec des pôles situés sur des hyperplans de  $\mathbf{C}^p$  (théorème 1 de [K-K]). F. Loeser étudie ces intégrales dans [L] et appelle pente de  $(f_1, \dots, f_p)$  les directions de leurs hyperplans polaires. Dans certains cas géométriques, il majore cet ensemble de pentes par un ensemble de formes linéaires liées à la géométrie du discriminant du morphisme  $(f_1, \dots, f_p) : X \rightarrow \mathbf{C}^p$ .

Considérons  $\mathcal{D}_X$  l'anneau des opérateurs différentiels et  $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] = \mathbf{C}_X[s_1, \dots, s_p] \otimes_{\mathbf{C}} \mathcal{D}_X$ . Soit  $m$  une section d'un  $\mathcal{D}_X$ -Module holonome, notons  $\mathcal{B}(m, x_0, f_1, \dots, f_p)$  l'idéal de  $\mathbf{C}[s_1, \dots, s_p]$  des polynômes  $b$  vérifiant au voisinage de  $x_0$  :

$$b(s_1, \dots, s_p) m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p} \in \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1+1} \dots f_p^{s_p+1} .$$

Ces polynômes sont appelés polynômes de Bernstein de  $(m, f_1, \dots, f_p)$  au voisinage de  $x_0$ . Suivant J. Bernstein [B], ils permettent de construire un prolongement des intégrales  $I_\phi(s_1, \dots, s_p)$ . Dans [S1], **C. Sabbah montre l'existence pour tout  $x_0 \in X$  d'un ensemble fini  $\mathcal{H}$  de formes linéaires à coefficients premiers entre eux dans  $\mathbf{N}$  telles que :**

$$\prod_{H \in \mathcal{H}} \prod_{i \in I_H} (H(s_1, \dots, s_p) + \alpha_{H,i}) \in \mathcal{B}(m, x_0, f_1, \dots, f_p) ,$$

**où  $\alpha_{H,i}$  sont des nombres complexes.** Dans [S2], il montre comment en déduire des résultats analogues à ceux de F. Loeser. Mais, J. Briançon et H. Maynadier montrent dans [B.May] que l'idéal  $\mathcal{B}(m, x_0, f_1, \dots, f_p)$  n'est en général pas principal.

**L'objet de cet article est notamment de montrer l'existence d'un ensemble  $\mathcal{H}$  minimal.** De plus, lorsque  $m$  est une section d'un module holome régulier, nous expliciterons cet ensemble géométriquement à partir de la variété caractéristique du système différentiel engendré par  $m$ .

Sur  $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ , nous considérons la filtration dièse (resp. la filtration relative) qui étend la filtration de  $\mathcal{D}_X$  en donnant à  $s_i$  le poids un (resp. zéro). Si  $M$  est un  $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -Module cohérent muni d'une bonne filtration dièse (resp. relative), nous notons  $\text{gr}^\sharp M$  (resp.  $\text{gr}^{\text{rel}} M$ ) son gradué pour cette filtration. La racine de l'anneau de  $\text{gr}^\sharp M$  (resp.  $\text{gr}^{\text{rel}} M$ ) est indépendante de la bonne filtration et définit un sous-espace analytique de  $T^*X \times \mathbf{C}^p$  appelé variété caractéristique dièse (resp. relative) de  $M$  et notée  $\text{car}^\sharp M$  (resp.  $\text{car}^{\text{rel}} M$ ).

Si  $M$  est un  $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -Module cohérent, nous expliquons que les dimensions des variétés caractéristiques dièse et relative de  $M$  se déterminent à l'aide des nombres grade des fibres de  $M$ . Ces résultats généralisent ceux des  $\mathcal{D}_X$ -Modules cohérents (voir pour ce cas [K2], [Bj2], [G-M] ...). En utilisant le théorème d'involativité de O. Gabber, nous montrons alors que pour toute section  $m$  d'un Module holonome :

**Résultat 1** *Il existe une variété lagrangienne conique  $\Lambda$  de  $T^*X$  non lisse en général telle que :*

$$\text{car}^{\text{rel}} \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p} = \Lambda \times \mathbf{C}^p .$$

Il en résulte en particulier que la dimension du  $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -Module

$$\frac{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}}{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1+1} \dots f_p^{s_p+1}}$$

est inférieure ou égale à  $\dim X + p - 1$ .

**Résultat 2** *Il existe une famille de couples  $(S_\alpha, X_\alpha)$  où les  $S_\alpha$  sont des sous-variétés algébriques de  $\mathbf{C}^p$  de dimensions inférieures ou égales à  $p - 1$  et les  $X_\alpha$  des sous-espaces analytiques de  $X$  telles que :*

$$\text{car}^{\text{rel}} \frac{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}}{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1+1} \dots f_p^{s_p+1}} = \bigcup T_{X_\alpha}^* X \times S_\alpha .$$

Par définition de la variété caractéristique relative, **la réunion des  $S_\alpha$  pour  $x_0 \in X_\alpha$  n'est autre que la variété des zéros de l'idéal  $\mathcal{B}(m, x_0, f_1, \dots, f_p)$** . Au passage, pour tout  $x_0$  dans  $X$ , notre résultat donne une nouvelle démonstration de l'existence d'un polynôme non nul dans  $\mathcal{B}(m, x_0, f_1, \dots, f_p)$ . Cette démonstration n'est intéressante que dans le cas analytique. En effet, si les  $f_i$  sont des polynômes, la preuve de J. Bersntein donnée dans [B] se généralise sans modification et reste la meilleure référence.

Pour préciser la structure de l'idéal  $\mathcal{B}(m, x_0, f_1, \dots, f_p)$ , le problème est que les variétés algébriques  $S_\alpha$  ne sont à priori pas toutes réunions d'hypersurfaces. En adaptant un résultat inspiré de O. Gabber et donné par Y.E. Björk dans [Bj2] sur le conoyau d'un endomorphisme injectif d'un Module pur, nous montrons que si  $M$  est un  $\mathcal{D}_X$ -Module holonome engendré par une section  $m$ , la famille  $\mathcal{G}$  des sous- $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -Modules  $L$  de type fini de  $M[\frac{1}{F}, s_1, \dots, s_p]f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}$  contenant  $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]mf_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}$  et tels que pour tout point  $x_0 \in X$  :

$$\text{grade} \frac{L_{x_0}}{\mathcal{D}_{X, x_0}[s_1, \dots, s_p]mf_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}} \geq \dim X + 2$$

admet un plus grand élément noté  $\tilde{L}$ . Ce Module  $\tilde{L}$  est un  $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -Module cohérent vérifiant :

1.  $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]mf_1^{s_1} \dots f_p^{s_p} \subset \tilde{L}$ ,
2.  $\tau(\tilde{L}) \subset \tilde{L}$ ,
3.  $\tilde{L}/\tau(\tilde{L})$  est un  $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -Module cohérent dont les fibres non nulles sont des modules purs de grade  $\dim X + 1$ , c'est à dire des modules tels que tous leurs sous-modules non réduit à zéro aient même dimension.

Nous en déduisons la précision suivante :

### Résultat 3

$$\text{car}^{\text{rel}} \frac{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]mf_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}}{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]mf_1^{s_1+1} \dots f_p^{s_p+1}} = \bigcup T_{X_\alpha}^* X \times S_\alpha \quad \text{avec}$$

— Chaque variété algébrique  $S_\alpha$  est de dimension  $p - 1$ .

- Les composantes irréductibles de dimension  $p - 1$  de chaque  $S_\alpha$  sont des hyperplans affines  $H_{\alpha,\beta}$  dont les directions sont des noyaux de formes linéaires à coefficients entiers positifs et premiers entre eux dans  $\mathbf{N}$ .
- Les composantes irréductibles des  $S_\alpha$  de dimension strictement inférieure à  $p - 1$  sont contenues dans des hyperplan affine du type  $\tau^k(H_{\alpha,\beta})$  où  $k \in \mathbf{Z}$  et  $\tau$  la translation  $(s_1, \dots, s_p) \mapsto (s_1 + 1, \dots, s_p + 1)$ .

Pour  $x_0 \in X$ , notons  $\mathcal{H}(x_0, m)$  l'ensemble des directions des hyperplans  $H_{\alpha,\beta}$  pour  $\alpha$  tel que  $x_0$  soit dans  $X_\alpha$ . Nous appelons ces directions les pentes de  $(m, f_1, \dots, f_p)$  au voisinage de  $x_0$ .

Le fait que les composantes irréductibles de dimension  $p - 1$  des  $S_\alpha$  soient des hyperplans affines dont les directions sont les noyaux de formes linéaires à coefficients premiers entre eux dans  $\mathbf{N}$  se déduit en fait du résultat de C. Sabbah sur l'existence d'un polynôme de Bernstein qui soit un produit de formes linéaires.

Nous obtenons alors :

**Résultat 4** *Considérons un produit de formes linéaires affines appartient à  $\mathcal{B}(m, x_0, f_1, \dots, f_p)$ . Alors, tout hyperplan vectoriel de  $\mathcal{H}(x_0, m)$  est direction de l'un de ses facteurs. De plus, il existe dans  $\mathcal{B}(m, x_0, f_1, \dots, f_p)$  un produit de formes linéaires affines dont les directions sont exactement l'ensemble  $\mathcal{H}(x_0, m)$  des pentes de  $(m, f_1, \dots, f_p)$  au voisinage de  $x_0$ . Enfin, la variété des zéros de  $\mathbf{in} \mathcal{B}(m, x_0, f_1, \dots, f_p)$  l'idéal engendré par les parties homogènes de plus haut degré des éléments de  $\mathcal{B}(m, x_0, f_1, \dots, f_p)$  est la réunion des pentes de  $(m, f_1, \dots, f_p)$  au voisinage de  $x_0$ . La racine de  $\mathbf{in} \mathcal{B}(m, x_0, f_1, \dots, f_p)$  est en particulier un idéal principal.*

Considérons l'application :

$$\exp^{2i\pi\cdot} : \mathbf{C}^p \longrightarrow (\mathbf{C}^*)^p \quad , \quad (s_1, \dots, s_p) \longmapsto (e^{2i\pi s_1}, \dots, e^{2i\pi s_p}) .$$

**Résultat 5** *L'image par l'application  $\exp^{2i\pi\cdot}$  de la variétés des zéros de  $\mathcal{B}(m, x_0, f_1, \dots, f_p)$  est une réunion de sous-ensembles de  $(\mathbf{C}^*)^p$  où chaque sous-ensemble est défini par une équation du type :*

$$(\sigma_1)^{a_1} \dots (\sigma_p)^{a_p} = \alpha$$

où  $(a_1, \dots, a_p)$  est une famille d'éléments de  $\mathbf{N}$  premier entre eux et  $\alpha$  un nombre complexe. L'ensemble des  $(a_1, \dots, a_p)$  est l'ensemble des coefficients des d'équations des pentes de  $(m, f_1, \dots, f_p)$  au voisinage de  $x_0$ .

Ce résultat répond à une question de N. Budur [Bu] posée pour le cas particulier  $M = \mathcal{O}_X$ .

Nous allons maintenant préciser  $\mathcal{H}(x_0, m)$  lorsque  $m$  est une section d'un Module holonome régulier. Rappelons pour cela quelques notations.

Soit  $\Lambda$  une variété lagrangienne conique de  $T^*X$ . Nous désignons par  $W_{f_1, \dots, f_p, \Lambda}^\sharp$  **l'adhérence dans  $T^*X \times \mathbf{C}^p$  de**

$$\left\{ (x, \xi + \sum_{i=1}^p s_i \frac{df_i(x)}{f_i(x)}, s_1, \dots, s_p) ; s_i \in \mathbf{C}, (x, \xi) \in \Lambda \text{ et } F(x) \neq 0 \right\}.$$

Dans [B-M-M1], avec J. Briançon et M. Merle, nous avons montré que si  $\Lambda$  n'est pas contenu dans  $F^{-1}(0)$ , les composantes irréductibles de  $W_{f_1, \dots, f_p, \Lambda}^\sharp \cap F^{-1}(0)$  sont toutes de dimension  $\dim X + p - 1$ . Leurs projections sur  $\mathbf{C}^p$  sont des hyperplans vectoriels dont les équations sont des formes linéaires à coefficients entiers positifs ou nuls. **Nous appelons pentes de  $(\Lambda, f_1, \dots, f_p)$  au voisinage de  $x_0$  les hyperplans vectoriels obtenus par projection sur  $\mathbf{C}^p$  des composantes irréductibles de  $W_{f_1, \dots, f_p, \Lambda}^\sharp \cap F^{-1}(0)$  qui rencontre la fibre de  $x_0$ . Nous notons  $\mathcal{H}(\Lambda, x_0, f_1, \dots, f_p)$  l'ensemble de ces pentes.**

A l'aide d'un résultat de C. Sabbah sur les variétés caractéristiques d'un module relatif engendrant un module holonome régulier (théorème 3.2, [S2]), nous avons établi les résultats suivants avec J. Briançon et M. Merle dans [B-M-M3]. Soit  $M$  un  $\mathcal{D}_X$ -Module holonome régulier  $M$  de variété caractéristique  $\Lambda$  et  $m$  une section engendrant  $M$ , alors :

1.  $\text{car}^\sharp(\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}) = W_{f_1, \dots, f_p, \Lambda}^\sharp,$
2.  $\text{car}^\sharp \left( \frac{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}}{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1+1} \dots f_p^{s_p+1}} \right) = W_{f_1, \dots, f_p, \Lambda}^\sharp \cap F^{-1}(0).$
3.  $W_{f_1, \dots, f_p, \Lambda}^\sharp(0) = W_{f_1, \dots, f_p, \Lambda}^\sharp \cap (s_1 = \dots = s_p = 0)$  est une variété lagrangienne conique de  $T^*X$ .

Un premier résultat dans ce sens était donné par M. Kashiwara et T. Kawai dans [K-K].

Nous montrons :

**Résultat 6** *Si  $m$  est une section d'un Module holonome régulier engendrant un  $\mathcal{D}_X$ -Module de variété caractéristique  $\Lambda$  :*

- *Les pentes de  $(m, f_1, \dots, f_p)$  au voisinage de  $x_0$  sont égales aux pentes de  $(\Lambda, f_1, \dots, f_p)$  au voisinage de  $x_0$  :  $\mathcal{H}(x_0, m) = \mathcal{H}(\Lambda, x_0, f_1, \dots, f_p)$  .*
- $\text{car}^{\text{rel}} \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p} = W_{f_1, \dots, f_p, \Lambda}^\sharp(0) \times \mathbf{C}^p$  .

Nous avons obtenu avec J. Briançon et M. Merle dans [B-M-M2] des résultats analogues pour  $p = 2$  et pour  $p$  quelconque dans le cas où les pentes de  $(\Lambda, f_1, \dots, f_p)$  sont contenues dans les hyperplans de coordonnées de  $\mathbf{C}^p$ . Dans [Mai], est développé une théorie des cycles évanescents de ces morphismes que nous appelons sans pente.



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Filtration dièse et filtration relative d'un <math>\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]</math>-Module</b>	<b>9</b>
1.1	Filtration dièse de $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ . . . . .	9
1.2	Filtration relative de $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ . . . . .	12
1.3	Dimension d'un $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -Module cohérent . . . . .	15
1.4	Théorème des zéros relatifs . . . . .	17
<b>2</b>	<b><math>\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]</math>-Module majoré par une lagrangienne</b>	<b>21</b>
2.1	Conséquence du théorème d'involutivité . . . . .	21
2.2	$\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -Module majoré par une lagrangienne . . . . .	22
2.3	$\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -Module majoré par une lagrangienne sans $\mathbf{C}[s_1, \dots, s_p]$ -torsion . . . . .	25
<b>3</b>	<b>Equations fonctionnelles associées à Module holonome relativement à plusieurs fonctions analytiques</b>	<b>29</b>
3.1	Variété caractéristique relative de $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]mf_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}$ . . . . .	29
3.2	Construction d'un quotient pur d'un sous-facteur de $\mathcal{D}_X[s]mf^s$ . . . . .	34
3.3	Remarques sur l'idéal de Bersntein $\mathcal{B}(m, x_0, f_1, \dots, f_p)$ . . . . .	45
3.3.1	Cas où $m$ est une section d'un Module holonome . . . . .	45
3.3.2	Cas où $m$ est une section d'un Module holonome régulier . . . . .	49
	<b>Références</b>	<b>53</b>

# 1 Filtration dièse et filtration relative d'un $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -Module

Soit  $X$  une variété analytique complexe. Nous désignons par  $\mathcal{O}_X$  le faisceau des fonctions holomorphes sur  $X$  et par  $\mathcal{D}_X$  celui des opérateurs différentiels muni de sa filtration naturelle  $(\mathcal{D}_X(k))_{k \in \mathbf{N}}$  définie par l'ordre des dérivations.

Localement, nous identifierons  $X$  à  $\mathbf{C}^n$  au moyen d'un système  $(x_1, \dots, x_n)$  de coordonnées locales. Un opérateur  $P \in \mathcal{D}_X(k)$  s'écrit alors :

$$P = \sum_{|\beta| \leq k} c_\beta(x) \partial^\beta \quad \text{où} \quad \beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbf{N}^n \quad \text{où} \quad c_\beta \in \mathcal{O}_X \text{ et } \partial^\beta = \frac{\partial^{\beta_1}}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial^{\beta_n}}{\partial x_n}.$$

Désignons  $\pi : T^*X \rightarrow X$  le fibré cotangent à  $X$ . Le gradué  $\text{gr } \mathcal{D}_X$  s'identifie au sous-faisceau de  $\pi_*(\mathcal{O}_{T^*X})$  des fonctions analytiques sur  $T^*X$  polynomiales par rapport aux fibres de  $\pi$ . Il est isomorphe localement au faisceau d'anneaux commutatifs gradués  $\mathcal{O}_X[\xi_1 \dots \xi_n]$ . Si  $P \in \mathcal{D}_X(k) - \mathcal{D}_X(k-1)$ , sa classe modulo  $\mathcal{D}_X(k-1)$  définit une section de  $\text{gr } \mathcal{D}_X$  appelé symbole principal de  $P$  et noté  $\sigma(P)$ .

Si  $M$  est un  $\mathcal{D}_X$ -Module cohérent, nous notons  $\text{car}_{\mathcal{D}_X} M$  sa variété caractéristique.

Soit  $p$  un entier supérieur ou égal à 1. Dans cette section, nous allons étudier le faisceau d'anneaux  $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] = \mathbf{C}_X[s_1, \dots, s_p] \otimes_{\mathbf{C}} \mathcal{D}_X$ . Nous notons toujours  $\pi : T^*X \times \mathbf{C}^p \rightarrow X$  la projection naturelle.

## 1.1 Filtration dièse de $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$

La filtration  $(\mathcal{D}_X^\sharp[s_1, \dots, s_p](k))_{k \in \mathbf{N}}$  de  $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$  est définie comme suit : un opérateur  $P$  appartient à  $\mathcal{D}_X^\sharp[s_1, \dots, s_p](k)$  s'il s'écrit localement :

$$P = \sum_{|\alpha| + |\beta| \leq k} a_{\alpha, \beta}(x) s^\alpha \partial^\beta \quad \text{où} \quad a_{\alpha, \beta} \in \mathcal{O}_X, \quad s^\alpha = s_1^{\alpha_1} \cdots s_p^{\alpha_p},$$

Nous l'appelons cette filtration la filtration dièse de  $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ .

Nous désignons par  $\text{gr}^\sharp \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$  le gradué de cette filtration. Ce gradué s'identifie au sous-faisceau de  $\pi_*(\mathcal{O}_{T^*X \times \mathbf{C}^p})$  des fonctions analytiques sur  $T^*X \times \mathbf{C}^p$  polynomiales par rapport aux fibres de  $\pi$ . Il est isomorphe localement au faisceau d'anneaux commutatifs gradués  $\mathcal{O}_X[s_1, \dots, s_p, \xi_1, \dots, \xi_n]$ . Il en résulte que  $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$  est un faisceau cohérent d'anneaux (voir par exemple [Bj2] Appendice III, theorem 2.7).

Un opérateur  $P \in \mathcal{D}_X^\sharp[s_1, \dots, s_p](k) - \mathcal{D}_X^\sharp[s_1, \dots, s_p](k-1)$  modulo  $\mathcal{D}_X^\sharp[s_1, \dots, s_p](k-1)$  définit une section de  $\text{gr}^\sharp \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$  appelée symbole dièse de  $P$  et noté  $\sigma^\sharp(P)$ . Localement :

$$\text{si } P = \sum_{|\alpha|+|\beta| \leq k} a_{\alpha,\beta}(x) s^\alpha \partial^\beta \quad , \quad \sigma^\sharp(P)(x, \xi, s) = \sum_{|\alpha|+|\beta|=k} a_{\alpha,\beta}(x) s^\alpha \xi^\beta .$$

Soit  $M$  un  $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -Module cohérent et  $(M_k)_{k \in \mathbf{Z}}$  une filtration de  $M$  pour la filtration dièse. Cette filtration est dite bonne si localement, il existe des sections  $m_1, \dots, m_l$  de  $M$  et des entiers relatifs  $k_1, \dots, k_l$  tels que  $M_k = \sum_{i=1}^l \mathcal{D}_X^\sharp[s_1, \dots, s_p](k - k_i) m_i$ . Nous notons  $\text{gr}^\sharp M$  le gradué de  $M$  pour cette filtration et  $\text{Ann gr}^\sharp M$  son annulateur comme  $\text{gr}^\sharp \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -Module. La racine de  $\text{Ann gr}^\sharp M$  est un idéal cohérent de  $\text{gr}^\sharp \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$  indépendante des bonnes filtrations dièses de  $M$ . Nous notons  $J^\sharp(M)$  cet idéal. Nous appelons variété caractéristique dièse de  $M$  le sous-espace analytique de  $T^*X \times \mathbf{C}^p$  défini par  $J^\sharp(M)$ . Nous le notons  $\text{car}^\sharp M$ .

Soit  $x_0 \in X$ . Au voisinage de  $x_0$ , nous identifions  $X$  à  $\mathbf{C}^n$  et  $x_0$  à l'origine au moyen d'un système de coordonnées locales. Pour tout  $(a, b) \in \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^p$ , notons  $\mathcal{M}_{x_0, a, b}$  l'idéal maximal de  $\text{gr}^\sharp \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]_{x_0}$  engendré par  $x_1, \dots, x_n, \xi_1 - a_1, \dots, \xi_n - a_n, s_1 - b_1, \dots, s_p - b_p$ . Le localisé  $((\text{gr}^\sharp M)_{x_0})_{\mathcal{M}_{x_0, a, b}}$  est un module de type fini sur l'anneau local  $(\text{gr}^\sharp \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]_{x_0})_{\mathcal{M}_{x_0, a, b}}$ . Sa dimension est indépendante de la bonne filtration dièse de  $M$  et coïncide avec  $\dim_{x_0, a, b} \text{car}^\sharp M$  la dimension en  $(x_0, a, b)$  de  $\text{car}^\sharp M$  (assertion analogue à la remarque 12 Chapitre 5, [G-M]) :

$$\dim((\text{gr}^\sharp M)_{x_0})_{\mathcal{M}_{x_0, a, b}} = \dim_{x_0, a, b} \text{car}^\sharp M .$$

Comme les fibres de la restriction de  $\pi$  à  $\text{car}^\sharp M$  sont coniques :

$$\dim_{x_0, 0, 0} \text{car}^\sharp M = \sup_{(a, b) \in \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^p} \dim_{x_0, a, b} \text{car}^\sharp M .$$

Le module  $(\text{gr}^\# M)_{x_0}$  est gradué et  $\mathcal{M}_{x_0,0,0}$  est le seul idéal maximal gradué de  $\text{gr}^\# \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]_{x_0}$ . Il s'en suit que :

$$\dim(\text{gr}^\# M)_{x_0} = \dim((\text{gr}^\# M)_{x_0})_{\mathcal{M}_{x_0,0,0}} .$$

Suivant J.-P Serre ([Se], Chapitre 4), un anneau  $A$  commutatif noethérien est régulier si la borne supérieure  $\text{gldh}(A)$  des entiers  $k$  tels que  $\text{Ext}^k(M, N) \neq 0$  pour un couple  $M, N$  de  $A$ -module est finie. Cette borne supérieure est appelée la dimension homologique globale de  $A$ . L'anneau des séries convergentes  $\mathbf{C}\{x_1, \dots, x_n\}$  est régulier de dimension homologique globale  $n$ . Des propriétés de transfert de la régularité ([Se], Chapitre 4 proposition 25), il résulte que l'anneau  $\mathbf{C}\{x_1, \dots, x_n\}[s_1, \dots, s_p, \xi_1 \dots \xi_n]$  est régulier de dimension  $2n + p$ . L'anneau localisé  $(\text{gr}^\# \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]_{x_0})_{\mathcal{M}_{x_0,0,0}}$  est alors un anneau local régulier de dimension  $2 \dim X + p$  ([Se], Chapitre 4 proposition 23). C'est donc un anneau de Cohen-Macaulay ([Se], Chapitre 4 paragraphe D corollaire 3) : la longueur des suites régulières maximales formées d'éléments de son idéal maximal coïncide avec la dimension de l'anneau. Suivant D. Rees [Re], si  $A$  est un anneau commutatif noethérien et  $E$  un  $A$ -module commutatif, nous appelons nombre grade de  $E$  l'entier :

$$\text{grade } E = \inf \{i \in \mathbf{N} ; \text{Ext}_A^i(E, A) \neq 0\} .$$

Si  $I = \text{ann } E$  est l'annulateur de  $E$ ,  $\text{grade } E = \text{grade}(A/I)$  et est le nombre maximum d'éléments d'une suite régulière de  $A$  formée d'éléments de  $I$  ([Ma], Chapitre 6, paragraphe 15 D).

Si  $M$  est un  $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -Module cohérent, pour tout  $x_0 \in X$ , les idéaux associés à  $(\text{gr}^\# M)_{x_0}$  sont contenue dans  $\mathcal{M}_{x_0,0,0}$ . Nous obtenons alors en utilisant la platitude et la commutation des Ext à la localisation pour les modules de type finie ([Se], Chapitre 4 proposition 18) :

$$\text{grade}(\text{gr}^\# M)_{x_0} = \text{grade}((\text{gr}^\# M)_{x_0})_{\mathcal{M}_{x_0,0,0}} .$$

Rappelons que si  $E$  est un  $A$ -module de type fini sur un anneau  $A$  local commutatif noethérien Cohen-Macaulay ([Ma], Chapitre 6 theorem 31). :

$$\text{grade } E + \dim \frac{A}{\text{ann } E} = \dim A$$

Il en résulte :

**Proposition 1** *Soit  $M$  est un  $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -Module cohérent, pour tout  $x_0 \in X$  :*

$$\dim (\mathrm{gr}^\# M)_{x_0} = 2 \dim X + p - \mathrm{grade} (\mathrm{gr}^\# M)_{x_0} = \dim_{x_0, 0, 0} \mathrm{car}^\# M .$$

## 1.2 Filtration relative de $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$

La filtration  $(\mathcal{D}_X^{\mathrm{rel}}[s_1, \dots, s_p](k))_{k \in \mathbf{N}}$  de  $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$  est définie comme suit : un opérateur  $P \in \mathcal{D}_X^{\mathrm{rel}}[s_1, \dots, s_p](k)$  s'il s'écrit localement :

$$P = \sum_{|\beta| \leq k} a_\beta(x, s) \partial^\beta \quad \text{où} \quad a_\beta \in \mathcal{O}_X[s_1, \dots, s_p] \text{ et } \partial^\beta = \frac{\partial^{\beta_1}}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial^{\beta_n}}{\partial x_n} .$$

Nous appelons cette filtration la filtration relative de  $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ .

Nous désignons par  $\mathrm{gr}^{\mathrm{rel}} \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$  le gradué de cette filtration. Ce gradué s'identifie au sous-faisceau de  $\pi_*(\mathcal{O}_{T^*X \times \mathbf{C}^p})$  des fonctions analytiques sur  $T^*X \times \mathbf{C}^p$  polynomiales par rapport aux fibres de  $\pi$ . Il est isomorphe localement au faisceau d'anneaux commutatifs gradués  $\mathcal{O}_X[s_1, \dots, s_p, \xi_1, \dots, \xi_n]$ .

Un opérateur  $P \in \mathcal{D}_X^{\mathrm{rel}}[s_1, \dots, s_p](k) - \mathcal{D}_X^{\mathrm{rel}}[s_1, \dots, s_p](k-1)$  modulo  $\mathcal{D}_X^{\mathrm{rel}}[s_1, \dots, s_p](k-1)$  définit une section de  $\mathrm{gr}^{\mathrm{rel}} \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$  appelée symbole relatif de  $P$  et noté  $\sigma^{\mathrm{rel}}(P)$ . Localement :

$$\text{Si } P = \sum_{|\beta| \leq k} a_{\alpha, \beta}(x, s) \partial^\beta \quad , \quad \sigma^{\mathrm{rel}}(P)(x, \xi, s) = \sum_{|\beta|=k} a_\beta(x, s) \xi^\beta .$$

Le faisceau d'anneaux  $\mathrm{gr}^{\mathrm{rel}} \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$  s'identifie à  $\mathcal{O}_X[s_1, \dots, s_p, \xi_1 \dots \xi_n]$ . C'est un faisceau cohérent d'anneaux commutatifs. Soit  $M$  un  $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -Module cohérent et  $(M_k)_{k \in \mathbf{Z}}$  une filtration de  $M$  pour la filtration relative. Nous disons que cette filtration est bonne si localement, il existe des sections  $m_1, \dots, m_l$  de  $M$  et des entiers relatifs  $k_1, \dots, k_p$  tels que :

$$M_k = \sum_{i=1}^p \mathcal{D}_X^{\mathrm{rel}}[s_1, \dots, s_p](k - k_i) m_i .$$

Nous notons  $\text{gr}^{\text{rel}} M$  le gradué de  $M$  pour cette filtration et  $\text{Ann } \text{gr}^{\text{rel}} M$  son annulateur comme  $\text{gr}^{\text{rel}} \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -Module. La racine de  $\text{Ann } \text{gr}^{\text{rel}} M$  est un idéal cohérent de  $\text{gr}^{\text{rel}} \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$  indépendant des bonnes filtrations relatives de  $M$ . Nous notons  $J^{\text{rel}}(M)$  cet idéal. Nous appelons variété caractéristique relative de  $M$  le sous-espace analytique de  $T^*X \times \mathbf{C}^p$  défini par  $J^{\text{rel}}(M)$  et le notons  $\text{car}^{\text{rel}} M$ .

Soit  $p : X \times \mathbf{C}^p \rightarrow X$  la projection sur  $X$ . Pour tout  $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -Module cohérent  $M$ , posons :  $M^{\text{an}} = \mathcal{O}_{X \times \mathbf{C}^p} \otimes_{p^{-1}\mathcal{O}_{X[s_1, \dots, s_p]}} p^{-1}M$ . Le faisceau  $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]^{\text{an}} = \mathcal{O}_{X \times \mathbf{C}^p} \otimes_{p^{-1}\mathcal{O}_{X[s_1, \dots, s_p]}} p^{-1}\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$  s'identifie au faisceau  $\mathcal{D}_{X \times \mathbf{C}^p / \mathbf{C}^p}$  des opérateurs différentiels relatifs. La filtration naturelle de  $\mathcal{D}_{X \times \mathbf{C}^p / \mathbf{C}^p}$  par l'ordre des dérivations n'est autre que :

$$\mathcal{O}_{X \times \mathbf{C}^p} \otimes_{p^{-1}\mathcal{O}_{X[s_1, \dots, s_p]}} p^{-1}\mathcal{D}_X^{\text{rel}}[s_1, \dots, s_p](k) .$$

Le faisceau  $M^{\text{an}}$  est un  $\mathcal{D}_{X \times \mathbf{C}^p / \mathbf{C}^p}$ -Module cohérent. Si  $(M_k)_{k \in \mathbf{Z}}$  est une bonne filtration relative de  $M$ ,  $\mathcal{O}_{X \times \mathbf{C}^p} \otimes_{p^{-1}\mathcal{O}_{X[s_1, \dots, s_p]}} p^{-1}M_k$  est une bonne filtration de  $M^{\text{an}}$ . Le gradué de cette filtration s'identifie à  $\mathcal{O}_{X \times \mathbf{C}^p} \otimes_{p^{-1}\mathcal{O}_{X[s_1, \dots, s_p]}} p^{-1}\text{gr}^{\text{rel}} M$ . Par platitude de  $\mathcal{O}_{X \times \mathbf{C}^p}$  sur  $p^{-1}\mathcal{O}_{X[s_1, \dots, s_p]}$ , son annulateur est  $\mathcal{O}_{X \times \mathbf{C}^p} \otimes_{p^{-1}\mathcal{O}_{X[s_1, \dots, s_p]}} p^{-1}\text{Ann } \text{gr}^{\text{rel}} M$  (voir [Bo.AC] Chapitre 1, paragraphe 2, corollaire 2). Nous notons  $J(M^{\text{an}})$  la racine de cet annulateur qui ne dépend pas des bonnes filtrations de  $M^{\text{an}}$ . Le sous-espace analytique  $\text{car } M^{\text{an}}$  de  $T^*X \times \mathbf{C}^p$  défini par  $J(M^{\text{an}})$  coïncide avec  $\text{car}^{\text{rel}} M$ .

Les faisceaux de Modules  $\text{gr}^{\text{rel}} M$  et  $\text{gr}^{\text{rel}} M^{\text{an}}$  sur  $\text{gr}^{\text{rel}} \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$  et  $\text{gr } \mathcal{D}_{X \times \mathbf{C}^p / \mathbf{C}^p}$  sont cohérents ([Bj2] Appendice III, theorem 2.17). Par platitude, pour tout entier  $i$  :

$$\text{Ext}_{\text{gr } \mathcal{D}_{\frac{X \times \mathbf{C}^p}{\mathbf{C}^p}}}^i(\text{gr } M^{\text{an}}, \text{gr } \mathcal{D}_{\frac{X \times \mathbf{C}^p}{\mathbf{C}^p}}) \quad \text{et} \quad \text{Ext}_{\text{gr}^{\text{rel}} \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]}^i(\text{gr}^{\text{rel}} M, \text{gr}^{\text{rel}} \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p])^{\text{an}}$$

sont isomorphes. Il en résulte que pour tout  $x_0 \in X$ , il existe  $U$  voisinage de  $x_0$  tel que pour tout  $(x, b) \in U \times \mathbf{C}^p$  :

$$\text{grade}(\text{gr } M^{\text{an}})_{x,b} \geq \text{grade}(\text{gr}^{\text{rel}} M)_{x_0}$$

La même preuve que dans le cas de la filtration dièse portant sur le fait qu'un anneau local régulier est Cohen-Macaulay montre :

$$\begin{aligned} \text{grade}(\text{gr } M^{\text{an}})_{x,b} &= 2 \dim X + p - \dim_{x,0,b} \text{car}^{\text{rel}} M \\ &= 2 \dim X + p - \sup_{a \in \mathbf{C}^n} \dim_{x,a,b} \text{car}^{\text{rel}} M . \end{aligned}$$

Nous obtenons donc :

**Remarque 1** *Si  $M$  est un  $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -Module cohérent, pour tout  $x_0 \in X$ , il existe  $U$  voisinage de  $x_0$  tel que pour tout  $(x, b) \in U \times \mathbf{C}^p$  :*

$$\begin{aligned} \dim_{x,0,b} \text{car}^{\text{rel}} M &= \sup_{a \in \mathbf{C}^n} \dim_{x,a,b} \text{car}^{\text{rel}} M \\ &\leq 2 \dim X + p - \text{grade}(\text{gr}^{\text{rel}} M)_{x_0} . \end{aligned}$$

Une difficulté de l'anneau  $\text{gr}^{\text{rel}} \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$  est d'une part que ses fibres n'ont pas même hauteur et d'autre part le défaut de fidèle platitude de  $\mathcal{O}_{X \times \mathbf{C}^p}$  sur  $p^{-1} \mathcal{O}_X[s_1, \dots, s_p]$ . Par exemple, l'anneau quotient :

$$L = \frac{\mathbf{C}\{x_1, \dots, x_n\}[s_1, \dots, s_p]}{(1 - s_1 x_1)} \neq 0 ,$$

mais :  $\mathbf{C}\{x_1, \dots, x_n, s_1, \dots, s_p\} \otimes_{\mathbf{C}\{x_1, \dots, x_n\}[s_1, \dots, s_p]} L = 0$ . Cette difficulté était déjà soulignée dans [M-N].

**Lemme 1** *(Théorème des zéros relatifs) si  $N$  est un  $\text{gr}^{\text{rel}} \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -Module cohérent, pour tout  $x_0$  in  $X$  :*

$$N_{x_0} = 0 \iff \exists U \text{ voisinage de } x_0 \text{ tel que } N^{\text{an}}|_{p^{-1}(U)} = 0 .$$

Preuve :  $\Rightarrow$  est facile. Nous montrons l'autre implication dans le sous-paragraphe 4.

**Proposition 2** *Soit  $M$  un  $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -Module cohérent et  $x_0 \in X$  :*

$$\begin{aligned} \text{grade}(\text{gr}^{\text{rel}} M)_{x_0} &= \sup_{U \text{ voisinage de } x_0} \inf_{(x,b) \in p^{-1}(U)} \text{grade}(\text{gr} M^{\text{an}})_{x,a} \\ &= 2 \dim X + p - \inf_{U \text{ voisinage de } x_0} \sup_{(x,b) \in p^{-1}(U)} \dim_{x_0,0,b} \text{car}^{\text{rel}} M . \end{aligned}$$

Preuve : Soit  $x_0 \in X$  et  $U$  voisinage de  $x_0$ . Posons :

$$k = \inf_{(x,b) \in p^{-1}(U)} \text{grade}(\text{gr} M^{\text{an}})_{x,b} .$$

Pour  $i < k$ , pour tout  $(x, b) \in p^{-1}(U)$  :

$$Ext_{\text{gr } \mathcal{D}_{\frac{X \times \mathbf{C}^p}{\mathbf{C}^p}}}^i(\text{gr } M^{\text{an}}, \text{gr } \mathcal{D}_{\frac{X \times \mathbf{C}^p}{\mathbf{C}^p}})_{x,b} = 0 .$$

Il résulte du lemme que pour  $i < k$  :

$$Ext_{\text{gr}^{\text{rel}} \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]}^i(\text{gr}^{\text{rel}} M, \text{gr}^{\text{rel}} \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p])_{x_0} = 0 .$$

Donc, pour tout  $U$  voisinage de  $x_0$  :

$$\text{grade}(\text{gr}^{\text{rel}} M)_{x_0} \geq \inf_{(x,b) \in p^{-1}(U)} \text{grade}(\text{gr } M^{\text{an}})_{x,b} .$$

et donc :

$$\text{grade}(\text{gr}^{\text{rel}} M)_{x_0} \geq \sup_{U \text{ voisinage de } x_0} \inf_{(x,b) \in p^{-1}(U)} \text{grade}(\text{gr } M^{\text{an}})_{x,b} .$$

D'autre part, voir preuve de la remarque 1, il existe  $U_0$  voisinage de  $x_0$  tel que pour tout  $(x, a) \in U_0 \times \mathbf{C}^p$  :

$$\text{grade}(\text{gr}^{\text{rel}} M)_{x_0} \leq \text{grade}(\text{gr } M^{\text{an}})_{x,b}$$

Ainsi, sur ce voisinage  $U_0$  :

$$\text{grade}(\text{gr}^{\text{rel}} M)_{x_0} \leq \inf_{(x,b) \in p^{-1}(U_0)} \text{grade}(\text{gr } M^{\text{an}})_{x,b} ,$$

ce qui montre la proposition.

### 1.3 Dimension d'un $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -Module cohérent

Soit  $B$  un anneau non nécessairement commutatif, nous disons qu'il est régulier s'il est noethérien à gauche et à droite et de dimension homologique globale finie. Si  $E$  est un  $B$ -module de type fini, par exemple à gauche, nous appelons nombre grade de  $E$ , l'entier :

$$\text{grade } E = \inf \{i \in \mathbf{N} ; Ext_B^i(E, B) \neq 0\} .$$



Suivant J.-E. Björk ([Bj2] Appendice IV), nous disons qu'un anneau régulier  $B$  vérifie la condition d'Auslander si pour tout  $B$ -module à gauche  $E$  de type fini et tout sous-module  $N$  à droite de  $Ext_B^k(E, B)$ , le grade de  $N$  est supérieure ou égal à  $k$ .

Tout anneau  $A$  régulier commutatif vérifie la condition d'Auslander ([A-B]). Rappelons une preuve de la démonstration. Tout d'abord, nous nous ramenons facilement au cas où  $A$  est local. Dans ce cas, pour tout module  $N$  de type fini,  $\text{grade } N = \dim A - \dim N$ . En utilisant cette égalité, il suffit de montrer que si  $M$  est un module de type fini,  $\text{grade } Ext_A^k(M, A) \geq k$ . Soit  $q$  un idéal premier appartenant au support de  $Ext_A^k(M, A)$ . Alors,  $Ext_{A_q}^k(M_q, A_q) = Ext_A^k(M, A)_q \neq 0$ . Ainsi,  $gldim A_q$  la dimension homologique globale de  $A_q$  est supérieure ou égale à  $k$ . Or l'anneau  $A_q$  est régulier. Donc, suivant [Se], Chapitre IV, corollaire 2,  $gldim A_q = \dim A_q$ . Choisissons  $q$  tel que  $\dim A/q = \dim Ext_A^k(M, A)$ . Comme  $A$  est Cohen Macaulay  $\text{ht}(q) + \dim A/q = \dim A$  où  $\text{ht}(q)$  désigne la hauteur de l'idéal,  $q$ . Nous obtenons :

$$\text{grade } Ext_A^k(M, A) = \dim A - \dim \frac{A}{q} = \text{ht}(q) = \dim A_q = gldim A_q \geq k .$$

Cette propriété d'Auslander est à la base des propriétés du nombre grade et de la filtration d'un module par son complexe bidualisant.

Suivant Björk ([Bj2], appendice IV, theorem 4.15), si  $B$  est un anneau filtré positivement dont le gradué est régulier et vérifie la condition d'Auslander, alors  $B$  est régulier et vérifie la condition d'Auslander. De plus, pour tout  $B$  module de type fini à gauche :

$$\text{grade}_B M = \text{grade}_{\text{gr } B} \text{gr } M ,$$

où  $\text{gr } M$  désigne le gradué d'une bonne filtration de  $M$ . L'application de ces résultats donnent :

**Proposition 3** *Les fibres de  $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$  sont des anneaux réguliers qui vérifient la condition d'Auslander. De plus, pour tout  $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -Module cohérent  $M$  et  $x_0 \in X$  :*

$$\text{grade } M_{x_0} = \text{grade}(\text{gr}^\# M)_{x_0} = \text{grade}(\text{gr}^{\text{rel}} M)_{x_0} .$$

Compte-tenu des propositions 1 et 2, nous obtenons le théorème suivant qui établit le lien entre le grade d'un  $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -Module cohérent et les dimensions de ses variétés caractéristiques dièse et relative.

**Théorème 1** *Pour tout  $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -Module cohérent  $M$  et  $x_0 \in X$  :*

$$\begin{aligned} \dim_{x_0,0,0} \text{car}^\sharp M &= \inf_{U \text{ voisinage de } x_0} \sup_{(x,a) \in p^{-1}(U)} \dim_{x_0,a,0} \text{car}^{\text{rel}} M \\ &= 2 \dim X + p - \text{grade } M_{x_0} . \end{aligned}$$

## 1.4 Théorème des zéros relatifs

**Proposition 4** *Soit  $X$  une variété analytique et  $I$  un idéal cohérent de  $\mathcal{O}_X[s_1, \dots, s_p]$  tel que :*

$$V(I) = \{(x, s) \in X \times \mathbf{C}^p ; \forall g \in I : g(x, s) = 0\} = \emptyset ,$$

*alors,  $I = \mathcal{O}_X[s_1, \dots, s_p]$ .*

**Preuve :** La question est locale sur  $X$ . Nous pouvons supposer que  $X$  est un voisinage de l'origine dans  $\mathbf{C}^n$  et  $I = (g_1, \dots, g_l)$  où  $g_i \in \mathcal{O}_X(X)[s_1, \dots, s_p]$ . Par hypothèse le système d'équations :

$$g_1(x, s) = \dots = g_l(x, s) = 0 \quad , \quad (x, s) \in X \times \mathbf{C}^p$$

n'a pas de solution. Nous devons montrer qu'il existe  $U$  voisinage de l'origine dans  $\mathbf{C}^n$  et  $a_1, \dots, a_l \in \mathcal{O}_X(U)[s_1, \dots, s_p]$  tels que :

$$1 = \sum_{i=1}^l a_i g_i|_U .$$

Soit un entier  $d$  tel que pour tout  $x \in X$ , les degrés en  $s$  des polynômes  $g_i(x, s)$  soient bornés par  $d$ . Chaque  $g_i$  s'écrit  $\sum_{|\beta| \leq d} g_{i,\beta}(x) s^\beta$  où  $g_{i,\beta} \in \mathcal{O}_X$ . D'après le théorème des zéros effectif ([H],[B]), il existe un entier  $N$  tel que pour tout  $x \in X$ , il existe des polynômes  $a_1(x)(s), \dots, a_l(x)(s)$  en  $s$  de degré inférieur ou égal à  $N$  tels que :

$$1 = \sum_{i=1}^l a_i(x)(s) g_i(x, s) .$$

Considérons alors l'équation polynomiale dont les inconnues sont les  $a_{i,\alpha}$  où  $i \in \{1, \dots, l\}$ ,  $\alpha \in \mathbf{N}^p$  et  $|\alpha| \leq N$  :

$$\sum_{i=1}^l \left( \sum_{|\alpha| \leq N} a_{i,\alpha} s^\alpha \right) \left( \sum_{|\beta| \leq d} g_{i,\beta}(x) s^\beta \right) = 1 ,$$

Cette équation s'écrit :

$$\sum_{|\gamma| \leq N+d} \left( \sum_{i=1}^l \sum_{|\alpha| \leq N, |\beta| \leq d}^{\alpha+\beta=\gamma} a_{i,\alpha} g_{i,\beta}(x) \right) s^\gamma = 1 .$$

Elle est équivalente au système linéaire d'inconnues les  $a_{i,\alpha}$  :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^l g_{i,0}(x) a_{i,0} = 1 \\ \sum_{i=1}^l \sum_{|\alpha| \leq N, |\beta| \leq d}^{\alpha+\beta=\gamma \neq 0} g_{i,\beta}(x) a_{i,\alpha} = 0 . \end{cases}$$

Nous avons vu que pour tout  $x \in U$ , ce système a des solutions. Après avoir ordonné les  $\alpha$  et  $\gamma$ , ce système s'écrit :

$$G(x)A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} .$$

où  $A$  est une matrice colonne de coefficients  $a_{i,\alpha}$  et  $G(x)$  une matrice dont les coefficients non nuls sont des  $g_{i,\beta}(x)$ .

Soit  $\Delta_1$  un mineur de la matrice  $G(x)$  de taille maximum  $r_1$  non identiquement nul dans un voisinage  $U$  de l'origine. Suivant les formules de Cramer, il existe des  $b_{i,\alpha,1}(x)$  mineurs de taille  $r_1 - 1$  de  $G(x)$  tels que pour tout  $x \in U$  vérifiant  $\Delta_1(x) \neq 0$  :

$$\sum_{i=1}^l \left( \sum_{|\alpha| \leq N} \frac{b_{i,\alpha,1}(x)}{\Delta_1(x)} s^\alpha \right) g_i(x, s) = 1 .$$

Ainsi, pour tout  $x \in U$  tels que  $\Delta_1(x) \neq 0$  :

$$\Delta_1(x) = \sum_{i=1}^l \left( \sum_{|\alpha| \leq N} b_{i,\alpha,1}(x) s^\alpha \right) g_i(x, s) .$$

Dons, pour tout  $x \in U$  :

$$\Delta_1^2(x) = \sum_{i=1}^l \left( \sum_{|\alpha| \leq N} b_{i,\alpha,1}(x) \Delta_1(x) s^\alpha \right) g_i(x, s) .$$

Si  $\Delta_1(0) \neq 0$ , quitte à diminuer  $U$ , nous obtenons l'existence de  $a_1; \dots, a_p \in \mathcal{O}_X(U)[s_1, \dots, s_p]$  tels que :

$$1 = \sum_{i=1}^l a_i g_i|_U .$$

Si  $\Delta_1(0) = 0$  : Considérons sur  $\Delta_1^{-1}(0) \subset X$ , un mineur  $\Delta_2$  de la matrice  $G(x)$  de taille maximum  $r_2$  non identiquement nul dans un voisinage  $U$  de l'origine. Suivant les formules de Cramer, il existe des  $b_{i,\alpha,2}(x)$  mineurs de taille  $r_2 - 1$  de  $G(x)$  tels que pour tout  $x \in U$  vérifiant  $\Delta_1(x) = 0$  et  $\Delta_2(x) \neq 0$  :

$$\sum_{i=1}^l \left( \sum_{|\alpha| \leq N} \frac{b_{i,\alpha,2}(x)}{\Delta_2(x)} s^\alpha \right) g_i(x, s) = 1 .$$

Il en résulte :

$$\Delta_2^2(x) - \sum_{i=1}^l \left( \sum_{|\alpha| \leq N} b_{i,\alpha,2}(x) \Delta_2(x) s^\alpha \right) g_i(x, s)$$

nul sur  $\Delta_1^{-1}(0)$ . D'après le théorème des zéros analytiques, il existe quitte à diminuer  $U$  un entier  $k$  tel que :

$$(\Delta_2^2(x) - \sum_{i=1}^l \left( \sum_{|\alpha| \leq N} b_{i,\alpha,2}(x) \Delta_2(x) s^\alpha \right) g_i(x, s))^k \in \mathcal{O}_X(U)[s_1, \dots, s_p](\Delta_1^2(x)) .$$

Vu l'écriture de  $\Delta_1^2$ , nous en déduisons quitte à diminuer  $U$ , l'existence de  $a_1, \dots, a_p \in \mathcal{O}_X(U)[s_1, \dots, s_p]$  tels que :

$$\Delta_2^{2k}(x) = \sum_{i=1}^l a_i g_{i|U} .$$

Si  $\Delta_2(0) \neq 0$ , nous terminons comme précédemment. Sinon, nous itérons. Le processus aboutit car les mineurs de taille 1 de  $G(x)$  ne sont pas tous nuls en zéro.

**Corollaire 1** *Soit  $X$  une variété analytique complexe,  $N$  un  $\mathcal{O}_X[s_1, \dots, s_p]$ -Module cohérent tel que  $N^{\text{an}} = \mathcal{O}_{X \times \mathbf{C}^p} \otimes_{p^{-1}\mathcal{O}_X[s_1, \dots, s_p]} p^{-1} N$  soit nul où  $p$  désigne la projection de  $X \times \mathbf{C}^p$  sur  $\mathbf{C}^p$ . Alors,  $N = 0$ .*

**Preuve :**  $(\text{Ann } N)^{\text{an}} = \text{Ann } (N^{\text{an}})$ . Il suffit alors d'appliquer la proposition 4 à l'idéal  $\text{Ann } N$ .

**Corollaire 2** *Soit  $X$  une variété analytique et  $I$  un idéal cohérent de  $\mathcal{O}_X[s_1, \dots, s_p]$ . Soit  $h \in \mathcal{O}_X[s_1, \dots, s_p]$  tel que  $h$  s'annule sur*

$$V(I) = \{(x, s) \in X \times \mathbf{C}^p ; \forall g \in I : g(x, s) = 0\} .$$

*Alors, localement au voisinage de tout point de  $X$ , il existe  $k$  tel que  $h^k \in I$ .*

**Preuve :** L'astuce de Rabinowitch s'adapte sans problème.

## 2 $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -Module majoré par une lagrangienne

### 2.1 Conséquence du théorème d'involutivité

Considérons tout d'abord sur  $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$  la filtration dièse. Le faisceau  $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$  est un faisceau de  $\mathbf{Q}$ -algèbres et  $\text{gr}^\# \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$  est un faisceau d'anneaux commutatifs. Si  $P \in \mathcal{D}_X^\#[s_1, \dots, s_p](k)$  et  $Q \in \mathcal{D}_X^\#[s_1, \dots, s_p](l) : PQ - QP \in \mathcal{D}_X^\#[s_1, \dots, s_p](k+l-1)$ . Dans un système de coordonnées locales si  $PQ - QP \notin \mathcal{D}_X^\#[s_1, \dots, s_p](k+l-2) :$

$$\sigma^\#(PQ - QP) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \sigma(P)}{\partial \xi_i} \frac{\partial \sigma(Q)}{\partial x_i} - \frac{\partial \sigma(P)}{\partial \xi_i} \frac{\partial \sigma(Q)}{\partial x_i}.$$

Cette formule étend le crochet de Poisson défini sur les symboles des opérateurs de  $\mathcal{D}_X$ . Si  $\alpha$  et  $\beta$  sont des fonctions sur  $\text{gr}^\# \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ , nous appelons crochet de Poisson de  $\alpha$  et  $\beta$  :

$$\{\alpha, \beta\} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \alpha}{\partial \xi_i} \frac{\partial \beta}{\partial x_i} - \frac{\partial \alpha}{\partial \xi_i} \frac{\partial \beta}{\partial x_i}.$$

Le théorème de O. Gabber [Ga] assure que si  $M$  est un  $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -Module cohérent à gauche,  $J^\#(M)$  la racine de l'annulateur du gradué de  $M$  pour toutes bonnes filtrations dièses est stable par crochet de Poisson.

De même, si nous considérons sur  $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$  la filtration relative,  $\text{gr}^{\text{rel}} \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$  est encore un faisceau d'anneaux commutatifs. Par le même théorème, nous obtenons que pour tout  $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -Module cohérent à gauche  $M$ ,  $J^{\text{rel}}(M)$  la racine de l'annulateur du gradué de  $M$  pour toutes bonnes filtrations relatives est stable par crochet de Poisson.

Soit  $\pi_2 : T^*X \times \mathbf{C}^p \rightarrow \mathbf{C}^p$ , la projection sur  $\mathbf{C}^p$ . Pour tout sous-ensemble  $Z$  de  $T^*X \times \mathbf{C}^p$  et  $c \in \mathbf{C}^p$ , nous notons  $Z(c)$  la fibre au dessus de  $c$  de la restriction de  $\pi_2$  à  $Z$ .

**Proposition 5** *Soit  $M$  un  $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -Module cohérent. Pour tout  $c \in \mathbf{C}^p$ , les fibres non vides  $(\text{car}^\# M)(c)$  et  $(\text{car}^{\text{rel}} M)(c)$  ont leurs composantes irréductibles de dimension au moins égales à la dimension de  $X$ .*

**Preuve :** En un point lisse de  $\text{car}^\sharp M$  où la restriction de  $\pi_2$  est de rang localement constant, la fibre  $(\text{car}^\sharp M)(c)$  est lisse réduite. Par le théorème d'involutivité,  $(\text{car}^\sharp M)(c)$  que nous identifions à un sous-espace de  $T^*X$  est involutive. Elle est donc de dimension supérieure ou égale à la dimension de  $X$ . Par semi-continuité de la dimension des fibres, nous en déduisons la propriété annoncée sur  $(\text{car}^\sharp M)(c)$ . Le même raisonnement s'applique pour  $(\text{car}^{\text{rel}} M)(c)$ .

## 2.2 $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -Module majoré par une lagrangienne

**Proposition 6** *Pour tout  $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -Module cohérent  $M$  :*

$$\text{car}^{\text{rel}} M \subset (\text{car}^\sharp M)(0) \times \mathbf{C}^p .$$

**Preuve :** Observons que si  $P \in \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ ,  $\sigma^\sharp(P)(x, \xi, 0) \neq 0$  implique  $\sigma^\sharp(P)(x, \xi, 0) = \sigma^{\text{rel}}(P)(x, \xi, s)$ . Pour démontrer la proposition, nous pouvons supposer que  $M$  est le quotient de  $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$  par un idéal à gauche cohérent  $I$ . Soit Nous déduisons de notre observation :

$$\text{car}^{\text{rel}} M \subset V(\{\sigma^\sharp(P)(x, \xi, 0) ; P \in I\}) = (\text{car}^\sharp M)(0) \times \mathbf{C}^p .$$

**Définition 1** *Soit  $M$  un  $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -Module cohérent. Nous disons que  $M$  est majoré par une lagrangienne  $\Lambda$  si  $\text{car}^{\text{rel}} M \subset \Lambda \times \mathbf{C}^p$  où  $\Lambda$  est une sous-variété lagrangienne conique éventuellement singulière de  $T^*X$ .*

Suivant la proposition 6 :

**Remarque 2** *Si  $(\text{car}^\sharp M)(0)$  est une variété lagrangienne de  $T^*X$ , alors  $M$  est majoré par la lagrangienne  $(\text{car}^\sharp M)(0)$*

Si  $M$  est un  $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -Module cohérent, pour tout  $c \in \mathbf{C}^p$ , notons :

$$M(c) = \frac{M}{\sum_{i=1}^p (s_i - c_i) M} .$$

Ces ensembles  $M(c)$  sont naturellement des  $\mathcal{D}_X$ -Modules cohérents et nous notons  $\text{car}_{\mathcal{D}_X} M(c)$  leurs variétés caractéristiques comme  $\mathcal{D}_X$ -Modules.

Nous avons clairement :

**Remarque 3** Soit  $M$  un  $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -Module cohérent, pour tout  $c \in \mathbf{C}^p$  :  $\text{car}^\sharp M(c) \subset (\text{car}^\sharp M)(0)$  et  $\text{car}^{\text{rel}} M(c) \subset (\text{car}^{\text{rel}} M)(c)$ . Nous identifions ces sous-espaces à des sous-ensembles de  $T^*X$ .

Soit localement,  $m_1, \dots, m_l$  un système de générateurs de  $M$ . Posons pour tout entier  $k$  :

$$M(c)(k) = \frac{\sum_{j=1}^l \mathcal{D}_X(k)m_j + \sum_{i=1}^p (s_i - c_i)M}{\sum_{i=1}^p (s_i - c_i)M}.$$

Les  $M(c)(k)$  sont à la fois une bonne filtration dièse, une bonne filtration relative de  $M(c)$ , mais aussi une bonne filtration de  $M(c)$  comme  $\mathcal{D}_X$ -Module. L'idéal engendré par  $s_1, \dots, s_p$  (resp.  $(s_1 - c_1, \dots, s_p - c_p)$ ) et par les symboles des opérateurs de  $\mathcal{D}_X$  annihilant  $\text{gr}(M(c))$  est l'idéal des symboles dièses (resp. relatifs) des opérateurs de  $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$  annihilant  $\text{gr}(M(c))$ . Nous en déduisons avec les identifications évidentes :

**Remarque 4** Soit  $M$  un  $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -Module cohérent, pour tout  $c \in \mathbf{C}^p$  :

$$\text{car}_{\mathcal{D}_X} M(c) = \text{car}^\sharp M(c) = \text{car}^{\text{rel}} M(c).$$

En particulier, nous obtenons :

**Proposition 7** Soit  $M$  un  $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -Module cohérent majoré par une lagrangienne  $\Lambda$ , alors pour tout  $c \in \mathbf{C}^p$ , les  $\mathcal{D}_X$ -Modules  $M(c)$  sont holonomes de variétés caractéristiques contenues dans  $\Lambda$ .

Nous allons préciser maintenant la structure de la variété caractéristique relative d'un  $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -Module cohérent majoré par une lagrangienne.

**Proposition 8** Soit  $M$  un  $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -Module cohérent majoré par une lagrangienne de composantes irréductibles  $(T_{X_\alpha}^* X)_{\alpha \in A}$ , alors il existe des sous-variétés algébriques  $S_\alpha$  de  $\mathbf{C}^p$  telles que :

$$\text{car}^{\text{rel}} M = \bigcup T_{X_\alpha}^* X \times S_\alpha.$$



**Preuve :** Par hypothèse, pour tout  $c \in \mathbf{C}^p$ ,  $(\text{car}^{\text{rel}} M)(c)$  est contenu dans la réunion des  $T_{X_\alpha}^* X$ . D'après le théorème d'involutivité, ses composantes irréductibles sont de dimensions supérieures à la dimension de  $X$ . Il en résulte que pour tout  $c \in \mathbf{C}^p$ , les composantes irréductibles de  $(\text{car}^{\text{rel}} M)(c)$  sont certaines des lagrangiennes  $T_{X_\alpha}^* X$ . Il existe donc des sous-ensembles  $S_\alpha$  de  $\mathbf{C}^p$  tels que :

$$\text{car}^{\text{rel}} M = \bigcup T_{X_\alpha}^* X \times S_\alpha .$$

Il reste à montrer que les  $S_\alpha$  sont des sous-variétés algébriques de  $\mathbf{C}^p$ . Soit  $(x_\alpha, \xi_\alpha)$  un point générique de  $T_{X_\alpha}^* X$ , nous avons :

$$S_\alpha = (\text{car}^{\text{rel}} M) \cap \{(x, \xi, s) \in T^* X \times \mathbf{C}^p ; x = x_\alpha \text{ et } \xi = \xi_\alpha\} .$$

Comme  $\text{car}^{\text{rel}} M$  est localement défini par un nombre fini d'équations polynomiales en  $s$ , les  $S_\alpha$  sont des sous-variétés algébriques de  $\mathbf{C}^p$ .

**Définition 2** Soit  $M$  un  $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -Module cohérent et  $x_0 \in X$ . Nous appelons idéal de Bernstein de  $M$  en  $x_0$  l'idéal noté  $\mathcal{B}_{x_0}(M)$  de  $\mathbf{C}[s_1, \dots, s_p]$  défini par :

$$\mathcal{B}_{x_0}(M) = \{b(s_1, \dots, s_p) \in \mathbf{C}[s_1, \dots, s_p] ; b(s_1, \dots, s_p)M_{x_0} = 0\} .$$

**Proposition 9** Soit  $M$  un  $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -Module cohérent de variété caractéristique relative  $\bigcup_{\alpha \in A} T_{X_\alpha}^* X \times S_\alpha$  où  $X_\alpha$  (resp .  $S_\alpha$ ) sont des sous-espaces analytiques de  $X$  (resp. sous-variétés algébriques de  $\mathbf{C}^p$ ), Alors  $V(\mathcal{B}_{x_0}(M))$  la variété des zéros de l'idéal de Bernstein de  $M$  en  $x_0$  est :

$$V(\mathcal{B}_{x_0}(M)) = \bigcup_{\alpha \in A, x_0 \in X_\alpha} S_\alpha .$$

**Preuve :** Soit  $b(s_1, \dots, s_p) \in \mathcal{B}_{x_0}(M)$ . Nous pouvons voir  $b$  comme un opérateur différentiel relatif de degré zéro. Son symbole relatif coïncide avec lui même. Il s'annule d'après l'hypothèse sur  $\text{car}^{\text{rel}} M$ . Ainsi ,  $b(s_1, \dots, s_p)$  s'annule sur les  $S_\alpha$  telles que  $x_0 \in X_\alpha$ . Inversement, supposons que  $b(s_1, \dots, s_p)$  s'annule sur les  $S_\alpha$  telles que  $x_0 \in X_\alpha$ . Il s'annule donc sur  $\text{car}^{\text{rel}} M$  au voisinage de  $x_0$ . D'après le corollaire 2 du théorème des zéros relatif , il existe un entier  $k$  tel que  $b^k \in \mathcal{J}^{\text{rel}}(M)$  au voisinage de  $x_0$ . Nous en déduisons pour toute section  $m$  de  $M_{x_0}$ , l'existence d'un entier  $k$  tel que  $b^k m = 0$  . Il en résulte que pour  $k$  assez grand  $b^k \in \mathcal{B}_{x_0}(M)$  et que  $b$  s'annule sur  $V(\mathcal{B}_{x_0}(M))$ .

**Corollaire 3** *Soit  $M$  un  $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -Module cohérent majoré par une lagrangienne et  $x_0 \in X$ . Si  $\text{grade } M_{x_0} \geq \dim X + 1$ , l'idéal de Bernstein de  $M$  en  $x_0$  est non réduit à zéro.*

**Preuve :** Suivant la remarque 1, pour tout  $a \in \mathbf{C}^p$  :

$$\dim_{x_0, a, 0} \text{car}^{\text{rel}} M \leq 2 \dim X + p - \text{grade}(\text{gr}^{\text{rel}} M)_{x_0} \leq \dim X + p - 1 .$$

Or suivant la proposition 8, il existe des sous-variétés algébriques  $S_\alpha$  de  $\mathbf{C}^p$  telles que :

$$\text{car}^{\text{rel}} M = \bigcup T_{X_\alpha}^* X \times S_\alpha .$$

Donc, pour  $x_0 \in X_\alpha$ , la variété algébrique  $S_\alpha$  est donc de dimension strictement inférieure à  $p$ . Il reste à utiliser la proposition 9.

### 2.3 $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -Module majoré par une lagrangienne sans $\mathbf{C}[s_1, \dots, s_p]$ -torsion

**Définition 3** *Soit  $B$  un anneau régulier qui vérifie la condition d'Auslander. Soit  $M$  un  $B$ -module, nous disons que  $M$  est pur si tous les sous-modules de  $M$  non réduit à zéro ont même nombre grade.*

**Proposition 10** *Soit  $M$  un  $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -Module cohérent majoré par une lagrangienne. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *Les sections non nulles des fibres de  $M$  sont sans  $\mathbf{C}[s_1, \dots, s_p]$ -torsion.*
2. *Les fibres non nulles de  $M$  sont des modules purs de nombre grade  $\dim X$ .*

*De plus, si l'une de ces assertions est vérifiée, il existe une variété lagrangienne  $\Lambda$  de  $T^*X$  telle que  $\text{car}^{\text{rel}} M = \Lambda \times \mathbf{C}^p$ .*

**Preuve**  $1 \Rightarrow 2$  : D'après la proposition 8 , il existe des sous-espaces analytiques (resp. algébriques)  $X_\alpha$  de  $X$  (resp.  $S_\alpha$  de  $\mathbf{C}^p$ ) telles que :

$$\text{car}^{\text{rel}} M = \bigcup T_{X_\alpha}^* X \times S_\alpha .$$

Soit  $x_0 \in X$ , suivant la proposition 2 :

$$\text{grade}(\text{gr}^{\text{rel}} M)_{x_0} = 2 \dim X + p - \sup\{\dim S_\alpha ; x_0 \in X_\alpha\} .$$

Il en résulte :  $\text{grade}(\text{gr}^{\text{rel}} M)_{x_0} \geq \dim X$ . Rappelons que suivant la proposition 3,  $\text{grade} M_{x_0} = \text{grade}(\text{gr}^{\text{rel}} M)_{x_0}$ . Soit  $N$  un sous-module de  $M_{x_0}$ , l'anneau  $\mathcal{D}_{X,x_0}[s_1, \dots, s_p]$  étant régulier et vérifiant la condition d'Auslander :  $\text{grade} N \geq \text{grade} M_{x_0}$  ([Bj2], appendice IV proposition 2.3). Le module  $N$  est majorée par une lagrangienne comme sous-module d'un module majorée par une lagrangienne. Si  $\text{grade} N \geq \dim X + 1$ , il résulterait du corollaire 3 que  $N$  aurait de la  $\mathbf{C}[s_1, \dots, s_p]$ -torsion ce qui est contraire aux hypothèses. Ainsi,  $M_{x_0}$  est pur de grade  $\dim X$ .

**Preuve 2  $\Rightarrow$  1 :** Si pour  $x_0 \in X$ , une section non nulle  $M_{x_0}$  avait de la  $\mathbf{C}[s_1, \dots, s_p]$ -torsion,  $M$  admettrait au voisinage de  $x_0$  un sous-module  $N$  tel que  $\mathcal{B}_{x_0}(N) \neq 0$ . Il résulterait des propositions 8 et 9 que les variétés algébriques  $S_\alpha$  pour  $x_0 \in X_\alpha$  intervenant dans la variété caractéristique relative de  $N$  seraient toutes de dimensions inférieures ou égales à  $p - 1$ . Il résulterait de la proposition 2 que  $\text{grade} N \geq \dim X + 1$  ce qui contredit l'hypothèse de pureté.

**Fin de la preuve :** Supposons vérifiées ces conditions équivalentes. Suivant [Bj2] Appendice IV theorem 4.11, il existe une bonne filtration relative  $\Gamma$  de  $M_{x_0}$  dont le gradué  $\text{gr}_\Gamma M_{x_0}$  est un  $\mathcal{D}_{X,x_0}[s_1, \dots, s_p]$  pur de grade  $\dim X$ . Rappelons, [Bj2], Appendice IV, proposition 2.6, que si  $B$  est un anneau régulier vérifiant la condition d'Auslander, un  $B$  module  $E$  de type fini est pur de grade  $l$  si et seulement si  $\text{Ext}_A^j(\text{Ext}_A^j(E, A), A) = 0$  équivaut à  $j \neq l$ . Il en résulte que pour  $j \neq \dim X$  :

$$\text{Ext}^j(\text{Ext}^j(\text{gr} M, \text{gr } \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]), \text{gr } \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p])_{x_0} = 0 .$$

En analysant pour la filtration déduite de  $\Gamma$ , nous obtenons pour tout  $a \in \mathbf{C}^p$  et  $j \neq \dim X$  :

$$\text{Ext}_{\text{gr } \mathcal{D}_{X \times \mathbf{C}^p / \mathbf{C}^p}}^j(\text{Ext}_{\text{gr } \mathcal{D}_{X \times \mathbf{C}^p / \mathbf{C}^p}}^j(\text{gr } M^{\text{an}}, \text{gr } \mathcal{D}_{X \times \mathbf{C}^p / \mathbf{C}^p}), \text{gr } \mathcal{D}_{X \times \mathbf{C}^p / \mathbf{C}^p})_{x_0, a} = 0 .$$

Ainsi, les fibres  $(\text{gr } M^{\text{an}})_{x_0, a}$  non nulles sont pures de grade  $\dim X$ . Rappelons que sur un anneau commutatif régulier, si un module de type fini est pur de grade  $l$ , tous les idéaux premiers minimaux de son support sont

de hauteur  $l$  ([Bj2] Appendice IV proposition 3.7). Nous obtenons ainsi que les composantes irréductibles de  $\text{car}^{\text{rel}} M$  au voisinage de  $x_0$  sont de dimension  $\dim X + p$ . Et pour tout  $\alpha$  tel que  $x_0 \in X_\alpha$ ,  $S_\alpha = \mathbf{C}^p$ .

**Proposition 11** *Soit  $M$  un  $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -Module cohérent tel que  $\text{car}^{\text{rel}} M = \Lambda \times \mathbf{C}^p$  où  $\Lambda$  est une variété lagrangienne de  $T^*X$ . Alors, pour tout  $c \in \mathbf{C}^p$  :*

$$\text{car}_{\mathcal{D}_X}(M(c)) = \Lambda .$$

**Preuve :** Il résulte du fait que  $\text{car}^{\text{rel}} M = \Lambda \times \mathbf{C}^p$  que  $\mathcal{J}^{\text{rel}}(M) = I[s_1, \dots, s_p]$  l'idéal de  $\mathcal{O}_X[\xi_1, \dots, \xi_n, s_1, \dots, s_p]$  engendré par l'idéal  $I$  de  $\mathcal{O}_X[\xi_1, \dots, \xi_n]$  des fonctions nulles sur  $\Lambda$ . L'inclusion  $\mathcal{J}^{\text{rel}}(M) \subset I[s_1, \dots, s_p]$  est claire. L'autre inclusion résulte du théoème des zéros relatifs, proposition 4 modulo l'astuce de Rabinowitch. Soit  $p_i$  pour  $i = 1, \dots, l$ , les idéaux premiers minimaux contenant  $I_{x_0}$ , les  $p_i[s_1, \dots, s_p]$  sont alors les idéaux premiers minimaux de  $\mathcal{J}^{\text{rel}}(M)_{x_0}$ . Considérons le complexe à deux termes de multiplication par  $s_1 - c_1$  :

$$\text{gr}^{\text{rel}} M_{x_0} \xrightarrow{s_1 - c_1} \text{gr}^{\text{rel}} M_{x_0} .$$

Notons  $L_1$  (resp.  $K_1$ ) son conoyau (resp. noyau). Soit  $(\mathcal{J}^{\text{rel}}(M)_{x_0}, s_1 - c_1)$  l'idéal de  $\text{gr}^{\text{rel}} \mathcal{D}_{X, x_0}[s_1, \dots, s_p]$  engendré par  $\mathcal{J}^{\text{rel}}(M)_{x_0}$  et  $s_1 - c_1$ . Ses idéaux premiers minimaux sont les  $q_i = (p_i[s_1, \dots, s_p], s_1 - c_1)$  pour  $i = 1, \dots, l$ . Les localisés  $(L_1)_{q_i}$  et  $(K_1)_{q_i}$  sont de longueur finie. Notons pour tout idéal premier  $q$  d'un anneau commutatif  $A$ ,  $e_q(E)$  la multiplicité d'un  $A$  module  $E$  de type fini. Un calcul de multiplicité donne :

$$e_{q_i}(L_1) - e_{q_i}(K_1) = e_{p_i}(\text{gr}^{\text{rel}} M)$$

De plus,  $M$  étant muni d'une bonne filtration le complexe :

$$M \xrightarrow{s_1 - c_1} M$$

de multiplication par  $s_1 - c_1$  est filtré. Le fait que cette filtration soit bonne implique la convergence de la suite spectrale de ce complexe filtré. La filtration de  $M$  induit sur  $L_1$  et  $K_1$  des filtrations à gradués noethériens, donc de bonnes filtrations. Nous obtenons :

$$e_{q_i}(\text{gr}^{\text{rel}} L_1) - e_{q_i}(\text{gr}^{\text{rel}} K_1) = e_{p_i}(\text{gr}^{\text{rel}} M) > 0$$

Il en résulte :

$$e_{q_i}(\mathrm{gr}^{\mathrm{rel}} L_1) > 0 .$$

Ainsi, les  $q_i$  sont des idéaux premiers minimaux du support de  $\mathrm{gr}^{\mathrm{rel}} L_1$ . D'autre part,  $(\mathcal{J}^{\mathrm{rel}}(M)_{x_0}, s_1 - c_1) \subset \mathcal{J}^{\mathrm{rel}}(L_1)$ . Donc, chaque  $q_i$  est contenu dans un idéal premier minimal du support de  $\mathrm{gr}^{\mathrm{rel}} L_1$ . Il en résulte que les  $q_i$  sont les idéaux premiers minimaux de  $\mathrm{gr}^{\mathrm{rel}} L_1$ . On obtient ainsi,

$$\mathrm{car}^{\mathrm{rel}} L_1 = \Lambda \times \{c_1\} \times \mathbf{C}^{p-1} .$$

Il reste à itérer pour obtenir  $\mathrm{car}^{\mathrm{rel}}(M(c)) = \Lambda$ .

**Proposition 12** *Soit  $M$  un  $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -Module cohérent dont les fibres sont des modules purs de grade  $\dim X$  et tel que  $(\mathrm{car}^{\sharp} M)(0)$  soit lagrangienne. Alors, pour tout  $c \in \mathbf{C}^p$  :*

$$(\mathrm{car}^{\sharp} M)(0) = \mathrm{car}^{\sharp}(M(c)) = \mathrm{car}_{\mathcal{D}_X}(M)(c)$$

**Preuve :** Il faut montrer que  $(\mathrm{car}^{\sharp} M)(0) = \mathrm{car}^{\sharp}(M(0))$ . Par hypothèse,  $(\mathrm{car}^{\sharp} M)(0)$  est lagrangienne et toutes les composantes irréductibles de  $\mathrm{car}^{\sharp} M$  sont de dimension  $\dim X + p$ . Il en résulte qu'aucune composante de  $\mathrm{car}^{\sharp} M$  n'est contenue dans  $s_i = 0$ . Filtrons  $M$  par une bonne filtration dièse. La proposition s'obtient par récurrence en considérant la suite spectrale du complexe filtré de multiplication par  $s_1 - c_1$  :

$$M \xrightarrow{s_1 - c_1} M$$

### 3 Equations fonctionnelles associées à Module holonome relativement à plusieurs fonctions analytiques

Soit  $f_1, \dots, f_p$ , des fonctions analytiques sur  $X$ . Notons  $F = f_1 f_2 \cdots f_p$  leur produit. Soit  $M$  un  $\mathcal{D}_X$ -Module holonome. Considérons  $\mathcal{O}_X[s_1, \dots, s_p, 1/F] f_1^{s_1} \cdots f_p^{s_p}$  le  $\mathcal{O}_X[s_1, \dots, s_p, 1/F]$ -Module libre de rang 1 de base  $f_1^{s_1} \cdots f_p^{s_p}$ . Le produit tensoriel :

$$M \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X[s_1, \dots, s_p, 1/F] f_1^{s_1} \cdots f_p^{s_p}$$

est muni d'une structure naturelle de  $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -Module définie pour toute section  $n$  de  $M$  et  $a$  de  $\mathcal{O}_X[s_1, \dots, s_p, 1/F]$  par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} (n \otimes a f_1^{s_1} \cdots f_p^{s_p}) = \\ \left( \frac{\partial}{\partial x_i} n \right) \otimes a f_1^{s_1} \cdots f_p^{s_p} + n \otimes \frac{\partial a}{\partial x_i} f_1^{s_1} \cdots f_p^{s_p} + \sum_{j=1}^p n \otimes s_j a \frac{\partial f_j}{\partial x_i} f_1^{s_1} \cdots f_p^{s_p} \quad . \end{aligned}$$

Nous notons,  $n \otimes a f_1^{s_1} \cdots f_p^{s_p} = a n f_1^{s_1} \cdots f_p^{s_p}$  et  $f_1^{s_1+r} \cdots f_p^{s_p+r} = F^r f_1^{s_1} \cdots f_p^{s_p}$  pour tout entier  $r$ .

Nous supposons  $M$  engendré par une section  $m$ .

#### 3.1 Variété caractéristique relative de $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1} \cdots f_p^{s_p}$

Dans ce paragraphe,  $M$  désigne un module holonome engendré par une section  $m$ . En dehors de  $F = 0$ , pour toute section  $m$  de  $M$  :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (n \otimes f_1^{s_1} \cdots f_p^{s_p}) = \left[ \left( \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^p \frac{s_i}{f_i} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \right) n \right] f_1^{s_1} \cdots f_p^{s_p}.$$

Munissons  $M$  de la bonne filtration  $\mathcal{D}_X(k)m$  et  $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]mf_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}$  de la bonne filtration relative  $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p](k)mf_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}$ . En dehors de  $F = 0$ , nous obtenons :

$$\mathrm{gr}^{\mathrm{rel}} \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]mf_1^{s_1} \dots f_p^{s_p} \simeq (\mathrm{gr}_{\mathcal{D}_X} M)[s_1, \dots, s_p] .$$

Comme  $M$  est holonome, pour tout  $x_0$  dans le support de  $M$ , le grade de  $(\mathrm{gr}_{\mathcal{D}_X} M)_{x_0}$  est égal à  $\dim X$ . Il en résulte que si  $F(x_0) \neq 0$  :

$$\mathrm{grade}(\mathrm{gr}^{\mathrm{rel}} \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]mf_1^{s_1} \dots f_p^{s_p})_{x_0} = \mathrm{grade}(\mathrm{gr}_{\mathcal{D}_X} M)_{x_0} = \dim X .$$

Nous obtenons ainsi :

**Lemme 2** *Pour tout  $x_0$  dans le support de  $M$  tel que  $F(x_0) \neq 0$  :*

$$\mathrm{grade}(\mathrm{gr}^{\mathrm{rel}} \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]mf_1^{s_1} \dots f_p^{s_p})_{x_0} = \dim X .$$

Notons  $\mathcal{G}_k(\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]mf_1^{s_1} \dots f_p^{s_p})$  le sous-Module formé des sections de  $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]mf_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}$  dont les fibres sont de grade supérieure ou égal à  $k$ . Les faisceaux  $\mathrm{gr}^{\mathrm{rel}} \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$  et  $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$  vérifient la condition de Noether : sur tout espace localement compact, les suites croissantes de sous-Modules cohérents stationnent. Cela permet d'assurer ([Bj2] Appendice IV theorem 2.30) que pour tout entier  $k$ , les  $\mathcal{G}_k(\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]mf_1^{s_1} \dots f_p^{s_p})$  sont des  $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -modules cohérents. En effet, le gradué de cette filtration  $\mathcal{G}$  s'obtient comme limite d'une suite spectrale associée à un complexe double filtré dont le deuxième tableau est composé des  $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -modules cohérents :

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{D}_X[s]}^j(\mathrm{Ext}_{\mathcal{D}_X[s]}^j(\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]mf_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}, \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]), \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]) .$$

**Lemme 3** *Pour tout  $x_0$  dans le support de  $M[1/F]$  :*

$$\mathrm{grade}(\mathrm{gr}^{\mathrm{rel}} \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]mf_1^{s_1} \dots f_p^{s_p})_{x_0} \geq \dim X .$$

**Preuve :** Le quotient :

$$\frac{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]mf_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}}{\mathcal{G}_{\dim X}(\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]mf_1^{s_1} \dots f_p^{s_p})} .$$

est un  $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$  Module cohérent supporté par  $F = 0$ . Du théorème des zéros, au voisinage de tout  $x_0 \in X$ , il résulte l'existence d'un entier  $l$  tel que :

$$mF^l f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p} = m f_1^{s_1+l} \dots f_p^{s_p+l} \in \mathcal{G}_{\dim X}(\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}) .$$

Comme pour tout  $P(x, \partial_x, s) \in \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$  :

$$P(x, \partial_x, s) m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p} = 0 \iff P(x, \partial_x, s_1 + l, \dots, s_p + l) m f_1^{s_1+l} \dots f_p^{s_p+l} = 0 ,$$

nous déduisons d'une résolution libre locale de  $\mathcal{D}_X[s] m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}$  une résolution libre locale de  $\mathcal{D}_X[s] m f_1^{s_1+l} \dots f_p^{s_p+l}$  et les bijections de translations entre :

$$Ext^i(\mathcal{D}_X[s] m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}, \mathcal{D}_X[s]) \text{ et } Ext^i(\mathcal{D}_X[s] m f_1^{s_1+l} \dots f_p^{s_p+l}, \mathcal{D}_X[s]) .$$

Il en résulte que les fibres en  $x_0$  de  $\mathcal{D}_X[s] m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}$  et  $\mathcal{D}_X[s] m f_1^{s_1+l} \dots f_p^{s_p+l}$  ont même grade et donc le lemme.

**Proposition 13** *Il existe une variété lagrangienne conique  $\Lambda$  de  $T^*X$  tel que :*

$$\text{car}^{\text{rel}} \mathcal{D}_X[s] m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p} = \Lambda \times \mathbf{C}^p .$$

**Preuve :** Commençons par donner une preuve géométrique. Noton  $1_i = (0 \dots, 0, 1, 0 \dots 0)$  où le 1 est placé à la  $i$ -ème place et appelons  $\tau_i$  la translation de  $T^*X \times \mathbf{C}^p$  définie par  $(x, \xi, s) \mapsto (x, \xi, s + 1_i)$ . Nous avons pour tout  $P(x, \partial_x, s) \in \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$  :

$$P(x, \partial_x, s) m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p} = 0 \iff P(x, \partial_x, s + 1_i) m f_i f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p} = 0 .$$

Ainsi,

$$\text{car}^{\text{rel}}(\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] m f_i f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}) = \tau_i^{-1}(\text{car}^{\text{rel}}(\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p})) .$$

D'autre part, il est clair que  $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] m f_i f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}$  est un sous-Module de  $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}$ . Donc,  $\text{car}^{\text{rel}}(\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p})$  est stable par les translations  $\tau_i^{-1}$  et donc par toutes translations



$(x, \xi, s) \mapsto (x, \xi, s - k)$  de  $T^*X \times \mathbf{C}^p$  où  $k \in \mathbf{N}^p$ . Nous en déduisons l'existence d'un sous-ensemble analytique conique  $\Lambda$  de  $T^*X$  tel que :

$$\text{car}^{\text{rel}} \mathcal{D}_X[s] m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p} = \Lambda \times \mathbf{C}^p .$$

D'après le lemme 3 et la remarque 1 de la section 1.2, pour tout  $x_0$  du support de  $M[1/F]$  et  $a \in \mathbf{C}^p$  :

$$\dim_{x_0, a, 0} \text{car}^{\text{rel}} \mathcal{D}_X[s] m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p} \leq \dim X + p .$$

Donc,  $\dim_{x_0, 0} \Lambda \leq n$ . Comme  $\Lambda$  est conique, la dimension de  $\Lambda$  en tout point est inférieure à  $n$ . En tout point lisse de  $\Lambda$ , la projection de  $\Lambda \times \mathbf{C}^p$  sur  $\mathbf{C}^p$  est une submersion. Il résulte du théorème d'involutivité rappelé au paragraphe 2.1 que  $\Lambda$  est un sous espace involutif conique de  $T^*X$ . C'est donc une variété lagrangienne.

Donnons une preuve plus algébrique. Soit  $P(s) \in \mathcal{D}_X^{\text{rel}}[s_1, \dots, s_p](k)$  tel que  $P(s) m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p} = 0$ . Remarquons que pour tout  $r \in \mathbf{N}^p$  :

$$\begin{aligned} P(s - r) m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p} &= P(s - r) m f_1^r f_1^{s_1 - r_1} \dots f_p^{s_p - r_p} \\ &= (P(s - r) f^r - f^r P(s - r)) m f_1^{s_1 - r_1} \dots f_p^{s_p - r_p} \\ &\in \mathcal{D}_X^{\text{rel}}[s_1, \dots, s_p](k - 1) m f_1^{s_1 - r_1} \dots f_p^{s_p - r_p} . \end{aligned}$$

Ainsi,  $\sigma^{\text{rel}}(P(s - r))$  annule le gradué de  $\mathcal{D}_X[s] m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}$  pour la bonne filtration induite par la filtration naturelle de  $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1 - r_1} \dots f_p^{s_p - r_p}$ . Donc,  $\sigma^{\text{rel}}(P(s - r)) \in \mathcal{J}^{\text{rel}}(\mathcal{D}_X[s] m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p})$  pour tout  $r \in \mathbf{N}^p$ . Cela montre que cet idéal est engendré par des symboles indépendants de  $s$ . Suivant le théorème d'involutivité sa racine est stable par crochet de Poisson. Nous en déduisons :

$$\text{car}^{\text{rel}} \mathcal{D}_X[s] m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p} = \Lambda \times \mathbf{C}^p ,$$

où  $\Lambda$  est une variété involutive conique de  $T^*X$ . Le même argument sur la dimension que précédemment utilisant le lemme 3 et la remarque 1 de la section 1.2 permet de conclure que  $\Lambda$  est lagrangienne.

**Proposition 14** *Pour tout  $x_0$  dans le support de  $M[1/F]$ , le module  $\mathcal{D}_{X, x_0}[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}$  est pur de grade  $\dim X$  : tout sous module non nul de  $\mathcal{D}_{X, x_0}[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}$  est de grade  $\dim X$ .*

**Preuve :** La proposition 13 dit que le Module  $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]mf_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}$  est majorée par une lagrangienne. Or,  $(\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]mf_1^{s_1} \dots f_p^{s_p})_{x_0}$  est sans  $\mathbf{C}[s_1, \dots, s_p]$ -torsion. Le résultat résulte de la proposition 10.

**Lemme 4** *Pour tout  $x_0$  dans le support de  $M[1/F]$  tel que  $F(x_0) = 0$  :*

$$\text{grade} \left( \frac{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]mf_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}}{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]mf_1^{s_1+1} \dots f_p^{s_p+1}} \right)_{x_0} \geq \dim X + 1 .$$

**Preuve :** Soit  $\Lambda$  la variété lagrangienne conique de  $T^*X$  telle que

$$\text{car}^{\text{rel}} \mathcal{D}_X[s]mf_1^{s_1} \dots f_p^{s_p} = \Lambda \times \mathbf{C}^p .$$

L'idéal  $\mathcal{J}^{\text{rel}}(\mathcal{D}_X[s]mf_1^{s_1} \dots f_p^{s_p})$  est l'idéal  $I \otimes_{\text{gr}^{\text{rel}} \mathcal{D}_X} \text{gr}^{\text{rel}} \mathcal{D}_X[s]$  où  $I$  est l'idéal de  $\text{gr}^{\text{rel}} \mathcal{D}_X$  des fonctions nulles sur  $\Lambda$ . Soit  $P$  un idéal premier définissant une composante irréductible de  $\Lambda$ . Cet idéal  $P$  est de dimension  $\dim X$ . Par un argument de translation, les multiplités de  $\text{gr}^{\text{rel}}(\mathcal{D}_X[s]mf_1^{s_1} \dots f_p^{s_p})_{x_0}$  et  $\text{gr}^{\text{rel}}(\mathcal{D}_X[s]mf_1^{s_1+1} \dots f_p^{s_p+1})_{x_0}$  en  $\mathcal{P} \otimes_{\text{gr}^{\text{rel}} \mathcal{D}_X} \text{gr}^{\text{rel}} \mathcal{D}_X[s]$  coïncident. Il en résulte qu'aucune composant irréductible de  $\Lambda \times \mathbf{C}^p$  n'est une composante de la variété caractéristique relative du quotient :

$$\frac{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]mf_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}}{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]mf_1^{s_1+1} \dots f_p^{s_p+1}}$$

Ce quotient a donc une variété caractéristique relative de dimension inférieure ou égale à  $\dim X + p - 1$ . Il reste à utiliser la proposition 2.

**Définition 4** *Soit  $m$  une section d'un  $\mathcal{D}_X$ -Module holonome et  $x_0 \in X$ . Nous appelons idéal de Bernstein de  $(m, f_1, \dots, f_p)$  au voisinage de  $x_0$  l'idéal  $\mathcal{B}(m, x_0, f_1, \dots, f_p)$  de  $\mathbf{C}[s_1, \dots, s_p]$  formé des polynômes  $b$  vérifiant au voisinage de  $x_0$  :*

$$b(s_1, \dots, s_p)mf_1^{s_1} \dots f_p^{s_p} \in \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]mf_1^{s_1+1} \dots f_p^{s_p+1} ,$$

*qui sont appelés polynômes de Bernstein de  $(m, f_1, \dots, f_p)$  au voisinage de  $x_0$ .*

Notons que l'idéal  $\mathcal{B}(m, x_0, f_1, \dots, f_p)$  n'est autre que l'idéal de Bernstein, au sens de la définition 2, du  $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -Module cohérent :

$$\frac{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}}{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1+1} \dots f_p^{s_p+1}} .$$

**Corollaire 4** *(Une preuve de l'existence d'une équation fonctionnelle de Bernstein dans le cas analytique) Si  $m$  est une section d'un  $\mathcal{D}_X$ -Module holonome, au voisinage de tout  $x_0 \in X$ , il existe un polynôme  $b(s_1, \dots, s_p)$  non nul :*

$$b(s_1, \dots, s_p) m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p} \in \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1+1} \dots f_p^{s_p+1} .$$

**Preuve :** Par le lemme 3, le quotient :

$$\frac{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}}{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1+1} \dots f_p^{s_p+1}}$$

a ses fibres de de grade supérieur ou égal à  $\dim X + 1$ . Il est majoré par une lagrangienne, car quotient d'un  $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -Module majoré par une lagrangienne (proposition 13). Il reste à utiliser le corollaire 3.

### 3.2 Construction d'un quotient pur d'un sous-facteur de $\mathcal{D}_X[s] m f^s$

Soit  $m$  une section d'un  $\mathcal{D}_X$ -Module holonome  $M$ . Considérons les applications bijectives  $\tau$  :

$$M[\frac{1}{F} s_1, \dots, s_p] f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p} \xrightarrow{\tau} M[\frac{1}{F} s_1, \dots, s_p] f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p} \text{ et } \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] \xrightarrow{\tau} \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$$

définies respectivement par :

$$\tau(n(s_1, \dots, s_p) f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}) = n(s_1 + 1, \dots, s_p + 1) f_1^{s_1+1} \dots f_p^{s_p+1}$$

et

$$\tau(P(x, \partial_x, s_1, \dots, s_p)) = P(x, \partial_x, s_1 + 1, \dots, s_p + p) .$$

Nous désignons également par  $\tau$  l'application :

$$T^*X \times \mathbf{C}^p \xrightarrow{\tau} T^*X \times \mathbf{C}^p \quad (x, \xi, s_1, \dots, s_p) \mapsto (x, \xi, s_1 + 1, \dots, s_p + 1) .$$

Pour toutes sections  $n$  de  $M$  et tout  $P \in \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$  :

$$P n f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p} = 0 \iff \tau(P) n f_1^{s_1+1} \dots f_p^{s_p+1} = 0 .$$

Nous en déduisons :

$$\text{car}^\# \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1+1} \dots f_p^{s_p+1} = \text{car}^\# \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p} ,$$

$$\text{car}^{\text{rel}} \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1+1} \dots f_p^{s_p+1} = \tau^{-1}(\text{car}^{\text{rel}} \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}) .$$

L'objet de ce paragraphe est de démontrer la proposition suivante et d'en donner les premières conséquences..

**Proposition 15** *Soit  $M$  un holonome engendré par une section  $m$ . Considérons la famille  $\mathcal{G}$  des sous  $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -Modules  $L$  de type fini de  $M[\frac{1}{F}, s_1, \dots, s_p] f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}$  contenant  $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}$  et tels que pour tout point  $x_0 \in X$  :*

$$\text{grade} \frac{L_{x_0}}{\mathcal{D}_{X, x_0}[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}} \geq \dim X + 2$$

*Cette famille admet un plus grand élément noté  $\tilde{L}$ . Ce Module  $\tilde{L}$  est un sous  $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -Module cohérent de  $M[\frac{1}{F}, s_1, \dots, s_p] f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}$  vérifiant :*

1.  $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p} \subset \tilde{L}$ ,
2.  $\tau(\tilde{L}) \subset \tilde{L}$ ,
3.  $\tilde{L}/\tau(\tilde{L})$  est un  $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -Module dont les fibres non nulles sont des modules purs de grade  $\dim X + 1$ .

La preuve est une adaptation de celle du théorème 2.12 [Bj2] appendice IV. Cette adaptation est nécessaire car  $\tau$  n'est pas un morphisme de  $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -Module.

Rappels sur les anneaux réguliers : Soit  $A$  un anneau régulier (non nécessairement commutatif) qui vérifie la condition d'Auslander : pour tout module à gauche de type fini, tout sous-module à droite de  $Ext_A^k(E, A)$  est de grade supérieur ou égal à  $k$ . Notons que cette condition est automatiquement vérifiée si  $A$  est un anneau commutatif régulier et qu'elle est à la base des propriétés du nombre grade et de la filtration d'un module par le complexe bidualisant. Rappelons ces propriétés (voir [Bj2] appendice IV) :

1. Si  $0 \rightarrow E' \rightarrow E \rightarrow E'' \rightarrow 0$  est une suite exacte de  $A$ -module à gauche de type fini,  $\text{grade } E = \inf(\text{grade } E', \text{grade } E'')$ .
2. Soit  $0 \subset G_l \subset \dots \subset G_0 = E$  la filtration d'un  $A$ -module à gauche de type fini par le complexe bidualisant, il existe une suite exacte fonctorielle en  $E$  :

$$0 \longrightarrow \frac{G_k}{G_{k+1}} \longrightarrow Ext_A^k(Ext_A^k(E, A), A) \longrightarrow Q_k \longrightarrow 0 ,$$

où  $\text{grade } Q_k \geq k + 2$ .

3. Si  $\text{grade } E = k$ , alors  $\text{grade } Ext_A^k(E, A) = k$ .
4. Si  $Ext_A^v(Ext_A^v(E, A), A) \neq 0$ , ce module est  $A$ -module pur de grade  $v$ .
5.  $E$  est pur de grade  $k$  si et seulement si  $0 = G_l = \dots = G_{k+1}$  et  $G_k = \dots = G_0 = E$ . Dans ce cas nous avons la suite exacte :

$$0 \longrightarrow E \xrightarrow{i(E)} Ext_A^k(Ext_A^k(E, A), A) \longrightarrow Q_k \longrightarrow 0 ,$$

où  $\text{grade } Q_k \geq k + 2$ .

**Définition 5** Soit  $E$  un  $A$ -module de type fini pur de grade  $k$ , nous disons que  $(\phi, E')$  est une extension pure docile de  $E$  si  $\phi : E \rightarrow E'$  est un morphisme injectif de  $A$ -modules, si  $E'$  est pur de grade  $E' = k$  et  $\text{grade}(E'/\phi(E)) \geq k + 2$ .

La terminologie extension pure docile est une traduction de tame pure extension ( voir [Bj2] appendice IV). Suivant les rappels, si  $E$  est pur de grade  $k$ , le morphisme naturel  $E \xrightarrow{i(E)} Ext_A^k(Ext_A^k(E, A), A)$  est une extension pure docile. En fait, cette extension naturelle est universelle au sens suivant :

**Proposition 16** *Soit  $E$  un  $A$ -module de type fini pur de grade  $k$  et  $(\phi, E')$  une extension pure docile de  $E$ . Alors, il existe un unique morphisme de  $A$ -module  $\tilde{\phi} : E \hookrightarrow Ext_A^k(Ext_A^k(E, A), A)$  tel que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\phi} & E' \\ \downarrow i(E) & & \downarrow \tilde{\phi} \\ Ext_A^k(Ext_A^k(E, A), A) & = & Ext_A^k(Ext_A^k(E, A), A) \end{array}$$

De plus,  $\tilde{\phi}$  est une extension pure docile.

**Preuve :** (proposition 2.9, [Bj2] appendice IV) Ce résultat est la clef de la proposition 15. Donnons une preuve. Considérons la suite exacte :

$$0 \rightarrow E \xrightarrow{\phi} E' \rightarrow \frac{E'}{\phi(E)} \rightarrow 0 .$$

Nous obtenons vu les hypothèses sur les nombres grade :

$$0 = Ext_A^k(\frac{E'}{\phi(E)}, A) \rightarrow Ext_A^k(E', A) \xrightarrow{Ext_A^k(\phi, A)} Ext_A^k(E, A) \rightarrow Ext_A^{k+1}(\frac{E'}{\phi(E)}, A) = 0$$

Donc,  $Ext_A^k(\phi, A)$  est un isomorphisme. Il en résulte le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\phi} & E' \\ \downarrow i(E) & & \downarrow i(E') \\ Ext_A^k(Ext_A^k(E, A), A) & \xrightarrow{Ext_A^k(Ext_A^k(\phi, A), A)} & Ext_A^k(Ext_A^k(E', A), A) \end{array}$$

L'existence de  $\tilde{\phi}$  s'en déduit. L'application  $\tilde{\phi}$  est clairement une extension pure docile. Il reste à montrer l'unicité de  $\tilde{\phi}$ . Si  $\tilde{\phi}'$  est un deuxième morphisme vérifiant  $\tilde{\phi}' \circ \phi = i(E)$ , nous avons  $(\tilde{\phi}' - \tilde{\phi}) \circ \phi = 0$  et

$\phi(E) \subset \ker(\tilde{\phi}' - \tilde{\phi})$ . Comme  $E' / \ker(\tilde{\phi}' - \tilde{\phi})$  s'injecte par  $\tilde{\phi}' - \tilde{\phi}$  dans  $\text{Ext}_A^k(\text{Ext}_A^k(E', A), A)$ , nous déduisons de la pureté du double ext que si  $E' / \ker(\tilde{\phi}' - \tilde{\phi})$  est non nul, il est de grade  $k$ . Mais  $E' / \phi(E)$  est de grade supérieur ou égal à  $k + 2$  et se surjecte dans  $E' / \ker(\tilde{\phi}' - \tilde{\phi})$ . Il en résulte  $\ker(\tilde{\phi}' - \tilde{\phi}) = E$  et  $\tilde{\phi}' = \tilde{\phi}$ .

**Preuve de la proposition 15 :** Nous détaillons la preuve au niveau des fibres de  $M$  en un point  $x_0$  de  $X$ . La cohérence de  $\tilde{L}$  résultera du fait que les sous-modules de ma famille  $\mathcal{G}$  peuvent être considérés en utilisant une version faisceautique de la proposition 16 comme des sous-modules de

$$\text{Ext}_{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]}^{\dim X + 1}(\text{Ext}_{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]}^{\dim X + 1}(\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}, \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]) \quad .$$

Si

$$\frac{\mathcal{D}_{X, x_0}[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1 - 1} \dots f_p^{s_p - 1}}{\mathcal{D}_{X, x_0}[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}}$$

est pur de grade  $k + 1$ , nous vérifions que  $\tilde{L}_{x_0} = \mathcal{D}_{X, x_0}[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}$ . Nous notons en utilisant l'action de  $\tau$  que les quotients :

$$\frac{\mathcal{D}_{X, x_0}[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1 + k} \dots f_p^{s_p + k}}{\mathcal{D}_{X, x_0}[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1 + k + 1} \dots f_p^{s_p + k + 1}}$$

ont même nombre grade.

**Sinon**, nous avons vu que :

$$\frac{\mathcal{D}_{X, x_0}[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1 - 1} \dots f_p^{s_p - 1}}{\mathcal{D}_{X, x_0}[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}}$$

est de grade supérieur ou égal à  $k + 1$ . Ce quotient admettrait donc un sous-module de grade supérieur ou égal à  $k + 2$ . Il existerait ainsi  $L$  un  $\mathcal{D}_{X, x_0}[s_1, \dots, s_p]$ -module tel que :

$$\mathcal{D}_{X, x_0}[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p} \stackrel{\neq}{\subset} L \subset \mathcal{D}_{X, x_0}[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1 - 1} \dots f_p^{s_p - 1}$$

et

$$\text{grade} \frac{L}{\mathcal{D}_{X,x_0}[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}} \geq k + 2 .$$

Considérons alors la famille  $\mathcal{G}_{x_0}$  des  $\mathcal{D}_{X,x_0}[s_1, \dots, s_p]$  modules  $L$  de type fini vérifiant

$$\mathcal{D}_{X,x_0}[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p} \not\subset L \subset M_{x_0}[\frac{1}{F}, s_1, \dots, s_p] f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}$$

et

$$\text{grade} \frac{L}{\mathcal{D}_{X,x_0}[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}} \geq k + 2 .$$

Le module  $M_{x_0}[\frac{1}{F}, s_1, \dots, s_p] f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}$  n'est pas de type fini. Mais pour tout sous-module  $N$  de type fini, il existe un entier  $r$  tel que  $N$  est un sous-module de  $\mathcal{D}_{X,x_0}[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1-r} \dots f_p^{s_p-r}$  qui est un module pur de grade  $\dim X$  (voir proposition 14). Ainsi, tous les sous-modules de type fini de  $M_{x_0}[\frac{1}{F}, s_1, \dots, s_p] f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}$  sont purs de grade  $\dim X$ .

**Lemme 5**  $\mathcal{G}_{x_0}$  admet un unique plus grand élément.

**Preuve du lemme :** ([Bj2], proposition 2.10 appendice IV) Rappelons cette preuve qui repose sur le problème universel des extensions pures dociles. Par les propriétés des nombres grade, la somme de deux éléments de  $\mathcal{G}_{x_0}$  est dans  $\mathcal{G}_{x_0}$ . Il suffit donc de montrer que toute suite croissante d'éléments de  $\mathcal{G}_{x_0}$  stationne. Soit  $L_v$  une telle suite, notons  $j_v$  et  $j_{v,v+1}$  les inclusions :

$$E = \mathcal{D}_{X,x_0}[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p} \xrightarrow{j_v} L_v \xrightarrow{j_{v,v+1}} L_{v+1} .$$

Suivant le problème universel des extensions pures dociles, nous avons le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} E = \mathcal{D}_{X,x_0}[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p} & \xrightarrow{j_v} & L_v \\ \downarrow i(E) & & \swarrow \tilde{j}_v \\ Ext^{\dim X+1}(Ext^{\dim X+1}(E, \mathcal{D}_{X,x_0}[s_1, \dots, s_p]), \mathcal{D}_{X,x_0}[s_1, \dots, s_p]) & & \end{array}$$



Par unicité de  $\tilde{j}_v$ , nous obtenons  $\tilde{j}_v = \tilde{j}_{v+1} \circ j_{v,v+1}$ . Ainsi, les images des morphismes  $\tilde{j}_v$  forment une suite croissante de sous-modules d'un module noethérien de type fini. Cette suite d'images et donc les  $L_v$  stationnent.

**Notation :** Nous notons  $\tilde{L}_{x_0}$  le plus grand élément de  $\mathcal{G}_{x_0}$ .

Par finitude de  $\tilde{L}_{x_0}$ , il existe un entier  $r$  tel que :

$$\tilde{L}_{x_0} \subset \mathcal{D}_{X,x_0}[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1-r} \dots f_p^{s_p-r}$$

Nous allons montrer que  $\tilde{L}_{x_0}$  satisfait les propriétés de la proposition 15.

Posons pour simplifier pour tout entier  $r$  et  $s = (s_1, \dots, s_p)$  :

$$E(s+r) = \mathcal{D}_{X,x_0}[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1+r} \dots f_p^{s_p+r} .$$

**Preuve de  $\tau(\tilde{L}_{x_0}) \subset \tilde{L}_{x_0}$  :** Considérons le morphisme surjectif :

$$\frac{\tau(\tilde{L}_{x_0})}{E(s+1)} \longrightarrow \frac{\tau(\tilde{L}_{x_0}) + E(s)}{E(s)} .$$

Mais :

$$\frac{\tau(\tilde{L}_{x_0})}{E(s+1)} = \tau\left(\frac{\tilde{L}_{x_0}}{E(s)}\right)$$

(nous passons au quotient l'action de  $\tau$ ) et donc :

$$\text{grade} \frac{\tau(\tilde{L}_{x_0}) + E(s)}{E(s)} \geq \text{grade} \frac{\tau(\tilde{L}_{x_0})}{E(s+1)} = \text{grade} \frac{\tilde{L}_{x_0}}{E(s)} \geq \dim X + 2 .$$

Ainsi,  $\tau(\tilde{L}_{x_0}) + E(s) \in \mathcal{G}$ ,  $\tau(\tilde{L}_{x_0}) + E(s) \subset \tilde{L}_{x_0}$  et  $\tau(\tilde{L}_{x_0}) \subset \tilde{L}_{x_0}$ .

**Preuve de**  $\text{grade} \frac{\tilde{L}_{x_0}}{\tau(\tilde{L}_{x_0})} = \text{grade} \frac{E(s)}{E(s+1)} \geq \dim X + 1$  : Considérons les inclusions  $E(s) \subset \tilde{L}_{x_0} \subset E(s-r)$  et  $\tau(\tilde{L}_{x_0}) \subset \tilde{L}_{x_0}$  :

$$\begin{aligned} \frac{\tau(\tilde{L}_{x_0})}{E(s+1)} &\hookrightarrow \frac{\tilde{L}_{x_0}}{E(s+1)} \hookrightarrow \frac{E(s-r)}{E(s+1)}, \\ \frac{E(s+1)}{\tau^{r+1}(\tilde{L}_{x_0})} &\hookrightarrow \frac{E(s)}{\tau^{r+1}(\tilde{L}_{x_0})} \hookrightarrow \frac{\tilde{L}_{x_0}}{\tau^{r+1}(\tilde{L}_{x_0})}. \end{aligned}$$

Donc,  $\tilde{L}_{x_0}/\tau(\tilde{L}_{x_0})$  (resp.  $E(s)/E(s+1)$ ) est un sous-facteur de  $E(s-r)/E(s+1)$  (resp.  $\tilde{L}_{x_0}/\tau^{r+1}(\tilde{L}_{x_0})$ ). Nous en déduisons :

$$\text{grade} \frac{\tilde{L}_{x_0}}{\tau(\tilde{L}_{x_0})} \geq \text{grade} \frac{E(s-r)}{E(s+1)} \text{ et } \text{grade} \frac{E(s)}{E(s+1)} \geq \text{grade} \frac{\tilde{L}_{x_0}}{\tau^{r+1}(\tilde{L}_{x_0})}.$$

Par action de  $\tau$ , pour  $k$  entier, les grades de  $E(s+k)/E(s+k+1)$  et  $\tau^k(\tilde{L}_{x_0})/\tau^{k+1}(\tilde{L}_{x_0})$  sont indépendants de  $k$ . Nous en déduisons par récurrence que  $E(s-r)/E(s+1)$  (resp.  $\tilde{L}_{x_0}/\tau^{r+1}(\tilde{L}_{x_0})$ ) est de même grade que  $E(s)/E(s+1)$  (resp.  $\tilde{L}_{x_0}/\tau(\tilde{L}_{x_0})$ ). Il en résulte :

$$\text{grade} \frac{\tilde{L}_{x_0}}{\tau(\tilde{L}_{x_0})} = \text{grade} \frac{E(s)}{E(s+1)}.$$

Enfin, nous avons montré que  $\text{grade} \frac{E(s)}{E(s+1)} \geq \dim X + 1$  (voir lemme 3).

**Preuve de**  $\frac{\tilde{L}_{x_0}}{\tau(\tilde{L}_{x_0})}$  **pur de grade**  $\dim X + 1$  : Considérons un  $\mathcal{D}_{X,x_0}[s_1, \dots, s_p]$ -module  $L'$  tel que

$$E(s+1) \subset \tau(\tilde{L}_{x_0}) \not\subset L' \subset \tilde{L}_{x_0}.$$

Nous avons la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \frac{\tau(\tilde{L}_{x_0})}{E(s+1)} \longrightarrow \frac{L'}{E(s+1)} \longrightarrow \frac{L'}{\tau(\tilde{L}_{x_0})} \longrightarrow 0.$$

Par maximalité de  $\tilde{L}_{x_0}$  :

$$\text{grade} \frac{L'}{E(s+1)} = \text{grade} \frac{\tau^{-1}(L')}{E(s)} \leq \dim X + 1 .$$

Or,

$$\text{grade} \frac{\tau(\tilde{L}_{x_0})}{E(s+1)} = \text{grade} \frac{\tilde{L}_{x_0}}{E(s)} \geq \dim X + 2 .$$

Il en résulte :

$$\text{grade} \frac{L'}{\tau(\tilde{L}_{x_0})} \leq \dim X + 1$$

et en prenant  $L' = \tilde{L}_{x_0}$  :

$$\text{grade} \frac{\tilde{L}_{x_0}}{\tau(\tilde{L}_{x_0})} \leq \dim X + 1$$

Mais

$$\text{grade} \frac{L'}{\tau(\tilde{L}_{x_0})} \geq \text{grade} \frac{\tilde{L}_{x_0}}{\tau(\tilde{L}_{x_0})} \geq \dim X + 1 .$$

Ainsi,

$$\text{grade} \frac{L'}{\tau(\tilde{L}_{x_0})} = \text{grade} \frac{\tilde{L}_{x_0}}{\tau(\tilde{L}_{x_0})} = \dim X + 1 .$$

Tout sous-module non nul de  $\tilde{L}_{x_0}/\tau(\tilde{L}_{x_0})$  est donc de grade  $\dim X + 1$  et  $\tilde{L}_{x_0}/\tau(\tilde{L}_{x_0})$  est donc pur de grade  $\dim X + 1$ .

**Remarque 5** Notons que  $\tilde{L} = \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}$  si et seulement si les fibres de

$$\frac{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}}{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1+1} \dots f_p^{s_p+1}}$$

sont des modules purs de grade  $\dim X + 1$ . Cette condition équivaut encore :

$$\text{Ext}_{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]}^i(\text{Ext}_{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]}^i(\frac{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]mf_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}}{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]mf_1^{s_1+1} \dots f_p^{s_p+1}}, \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p])) \neq 0 \implies i = \dim X + 1 .$$

**Preuve :** Voir la définition de  $\tilde{L}$ .

Donnons maintenant quelques propriétés de  $\tilde{L}$ .

**Proposition 17** *Le  $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -module  $\tilde{L}$  construit dans la proposition précédente vérifie :*

1.  $\text{car}^\# \frac{\tilde{L}}{\tau(\tilde{L})} = \text{car}^\# \frac{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]mf_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}}{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]mf_1^{s_1+1} \dots f_p^{s_p+1}},$
2. *localement au voisinage de tout point  $x_0$  de  $X$ , il existe un entier  $r$  tel que :*

$$\text{car}^{\text{rel}} \frac{\tilde{L}}{\tau(\tilde{L})} \subset \bigcup_{k=0}^r \text{car}^{\text{rel}} \tau^k \left( \frac{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]mf_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}}{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]mf_1^{s_1+1} \dots f_p^{s_p+1}} \right) ,$$

3. *localement au voisinage de tout point  $x_0$  de  $X$ , il existe un entier  $r$  tel que :*

$$\text{car}^{\text{rel}} \frac{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]mf_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}}{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]mf_1^{s_1+1} \dots f_p^{s_p+1}} \subset \bigcup_{k=0}^r \text{car}^{\text{rel}} \tau^{-k} \left( \text{car}^{\text{rel}} \frac{\tilde{L}}{\tau(\tilde{L})} \right) .$$

**Preuve :** Localement au voisinage de tout point  $x_0$  de  $X$ , il existe un entier  $r$  tel que  $\tilde{L}/\tau(\tilde{L})$  (resp.  $E(s)/E(s+1)$ ) est quotient de sous-modules de  $E(s-r)/E(s+1)$  (resp.  $\tilde{L}/\tau^{r+1}(\tilde{L})$ ). Nous utilisons de plus que pour  $L$  sous-module cohérent de  $M[1/F, s_1, \dots, s_p]f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}$  :

$$\text{car}^\# \frac{L}{\tau(L)} = \text{car}^\# \frac{\tau^k(L)}{\tau^{k+1}(L)} \quad \text{et} \quad \text{car}^{\text{rel}} \frac{\tau^k(L)}{\tau^{k+1}(L)} = \tau^{-k} \left( \text{car}^{\text{rel}} \frac{L}{\tau(L)} \right) .$$

Rappelons quelques propriétés des modules purs sur un anneau  $A$  filtré positivement dont le gradué  $\text{gr } A$  est commutatif régulier. Si un  $\text{gr } A$ -module de type fini est pur, ses idéaux associés coïncident avec les idéaux

premiers minimaux de son support et la hauteur de ces idéaux est constante égale au grade du module (voir [Bj2], appendice IV proposition 3.7). Cette condition caractérise en fait les modules purs (voir [Bj2], appendice IV remarque 3.8). Si  $N$  est un  $A$ -module pur, il existe une bonne filtration de  $N$  tel que le gradué de  $N$  soit un  $\text{gr } A$ -module pur (voir [Bj2], appendice IV theorem 4.11). La conséquence est que  $\mathcal{J}(N)$  la racine de l'annulateur de  $\text{gr } N$  a tous ses idéaux associés de même hauteur. Prendre garde que pour  $p$  idéal premier de  $\text{gr } A$ , nous n'avons pas nécessairement  $\dim(\text{gr } A/p) + \text{ht } p = \dim \text{gr } A$ .

En particulier si  $N$  est un  $\mathcal{D}_{X,x_0}[s_1, \dots, s_p]$ -module pur de grade  $\dim X + 1$ , il existe une bonne filtration dièse de  $N$  tel que  $\text{gr}^\# N$  soit pur de même grade. Les idéaux premiers associés de  $\text{gr}^\# N$  sont homogènes en  $(\xi, s)$  et leurs hauteurs coïncident avec la codimension des germes des espaces analytiques qu'ils définissent sur  $T^*X \times \mathbf{C}^p$ . De la proposition 17, nous déduisons en prenant  $N = \tilde{L}/\tau(\tilde{L})$  :

**Corollaire 5** *Les composantes irréductibles de*

$$\text{car}^\# \frac{\tilde{L}}{\tau(\tilde{L})} = \text{car}^\# \frac{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}}{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1+1} \dots f_p^{s_p+1}} .$$

*sont toutes de dimension  $\dim X + p - 1$ .*

**Corollaire 6** *Il existe une famille  $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$  de sous-espaces analytiques de  $X$  et une famille  $(S'_\alpha)_{\alpha \in A}$  de réunion d'hypersurfaces algébriques de  $\mathbf{C}^p$  telles que :*

$$\text{car}^{\text{rel}} \left( \frac{\tilde{L}}{\tau(\tilde{L})} \right) = \cup_{\alpha \in A'} T_{Y_\alpha}^* X \times S'_\alpha .$$

**Preuve :** Le  $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -Module  $\tilde{L}/\tau(\tilde{L})$  étant majoré par une lagrangienne, il existe suivant la proposition 8 une famille  $(Y_\alpha)_{\alpha \in A'}$  (resp.  $S'_\alpha$ ) de sous-espaces analytiques (resp. variétés algébriques de  $\mathbf{C}^p$ ) telle que  $\text{car}^{\text{rel}}(\tilde{L}/\tau(\tilde{L})) = \cup_{\alpha \in A'} T_{Y_\alpha}^* X \times S'_\alpha$ . Alors, pour tout  $\alpha$ , les  $S'_\alpha$  sont de dimension  $p - 1$ . Nous considérons le module pur  $N = \tilde{L}/\tau(\tilde{L})$ . Il admet donc une bonne filtration relative tel que  $\text{gr}^{\text{rel}} N$  soit pur. Si  $p$  est un idéal premier minimal du support de ce gradué, le quotient  $\text{gr}^{\text{rel}}(\mathcal{D}_{X,x_0}[s_1, \dots, s_p])/p$  est pur de grade  $\dim X + 1$ . Il en résulte que le sous-espaces analytique qu'il définit est de dimension  $\dim X + p - 1$ . Toutes les composantes de  $\text{car}^{\text{rel}} N$  sont donc de dimension  $\dim X + p - 1$ . Les  $S'_\alpha$  sont donc de dimension  $p - 1$ .

**Remarque 6** Nous verrons dans le paragraphe suivant que les  $S'_\alpha$  sont en fait des hyperplans affines. Il en résultera que la variété des zéros de l'idéal de Bernstein  $\mathcal{B}_{x_0}(\tilde{L}/\tau(\tilde{L}))$  est une réunion d'hyperplans affines.

### 3.3 Remarques sur l'idéal de Bernstein $\mathcal{B}(m, x_0, f_1, \dots, f_p)$

#### 3.3.1 Cas où $m$ est une section d'un Module holonome

$M$  désigne toujours un  $\mathcal{D}_X$ -Module holonome engendré par une section  $m$  et  $f_1, \dots, f_p$  sont des fonctions analytiques sur  $X$ .

Rappelons, voir définition 4, que  $\mathcal{B}(m, x_0, f_1, \dots, f_p)$  désigne l'idéal des polynômes  $b$  de  $\mathbf{C}[s_1, \dots, s_p]$  vérifiant au voisinage de  $x_0$  :

$$(*) \quad b(s_1, \dots, s_p) m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p} \in \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1+1} \dots f_p^{s_p+1} .$$

Ces polynômes sont appelés polynômes de Bernstein de  $(m, f_1, \dots, f_p)$  au voisinage de  $x_0$ .

**Proposition 18** (*C. Sabbah proposition 1.2 de [S2]*) Pour toute section  $m$  d'un Module holonome, pour tout  $x_0 \in X$ , il existe un nombre fini de formes linéaires  $\mathcal{H}$  à coefficients premiers entre eux dans  $\mathbf{N}$  telles que :

$$\prod_{H \in \mathcal{H}} \prod_{i \in I_{\mathcal{H}}} (H(s) + \alpha_{H,i}) \in \mathcal{B}(m, x_0, f_1, \dots, f_p)$$

où  $\alpha_{H,i}$  sont des nombres complexes.

La preuve de C. Sabbah repose sur la proposition 2.2.3 de [S1], voir également [S3]. Si  $M = \mathcal{O}_X$ , comme indiqué dans [S3], les complexes peuvent être pris rationels positifs ( voir une preuve dans l'article [Go] de A. Gyoja).

**Proposition 19** *Il existe  $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$  (resp.  $S_\alpha$ ) une famille finie de sous-espaces analytiques (resp. variétés algébriques de  $\mathbf{C}^p$  telles que*

$$\text{car}^{\text{rel}} \left( \frac{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}}{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1+1} \dots f_p^{s_p+1}} \right) = \cup_{\alpha \in A} T_{X_\alpha}^* X \times S_\alpha .$$

avec les conditions :

- chaque variété algébrique  $S_\alpha$  est de dimension  $p - 1$ ,
- les composantes irréductibles de dimension  $p - 1$  de chaque  $S_\alpha$  sont des hyperplans affines  $H_{\alpha, \beta}$  de directions les noyaux de formes linéaires à coefficients premiers entre eux dans  $\mathbf{N}$ ,
- toute composante irréductible des  $S_\alpha$  de dimension strictement inférieure à  $p - 1$  est contenue dans un hyperplan affine  $\tau^k(H_{\alpha, \beta})$  où  $k \in \mathbf{Z}$  et  $\tau$  la translation  $(s_1, \dots, s_p) \mapsto (s_1 + 1, \dots, s_p + 1)$ .

**Preuve :** Considérons le  $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -module  $\tilde{L}$  construit à la proposition 15. Au voisinage de tout point  $x_0$ , il existe un entier  $r$  tel que :

$$\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p} \subset \tilde{L} \subset \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1-r} \dots f_p^{s_p-r} .$$

Suivant le corollaire 6, il existe  $(X'_\alpha)_{\alpha \in A}$  (resp.  $S'_\alpha$ ) une famille de sous-espaces analytiques (resp. de variétés algébriques de  $\mathbf{C}^p$  de dimension  $p - 1$ ) tels que

$$\text{car}^{\text{rel}}(\tilde{L}/\tau(\tilde{L})) = \cup_{\alpha \in A'} T_{X'_\alpha}^* X \times S'_\alpha .$$

Considérons  $b_S$  un polynôme de  $\mathcal{B}(m, x_0, f_1, \dots, f_p)$  parmi ceux dont l'existence est assurée dans la proposition 18. Comme  $b_S(s - r) \dots b_S(s) \tilde{L} \subset \tau(\tilde{L})$ , ce produit  $b_S(s - r) \dots b_S(s)$  s'annule sur les  $S'_\alpha$  tels que  $x_0 \in X_\alpha$ . Vu la dimension des  $S'_\alpha$ , cela montre que les  $S'_\alpha$  sont des réunions d'hyperplans affines.

D'autre part suivant la proposition 13, il existe une variété lagrangienne  $\Lambda$  de  $T^*X$  telle que :

$$\text{car}^{\text{rel}} \mathcal{D}_X[s] m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p} = \Lambda \times \mathbf{C}^p .$$

Il existe donc  $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$  (resp.  $S_\alpha$ ) une famille de sous-espaces analytiques (resp. de variétés algébriques de  $\mathbf{C}^p$ ) telles que

$$\text{car}^{\text{rel}} \left( \frac{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}}{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1+1} \dots f_p^{s_p+1}} \right) = \cup_{\alpha \in A} T_{X_\alpha}^* X \times S_\alpha .$$

Nous déduisons alors de la proposition 17 que  $A' = A$  et  $X_\alpha = Y_\alpha$  et :

$$\bigcup S'_\alpha \subset \bigcup_{k=0}^r \tau^k(\bigcup S_\alpha) \text{ et } \bigcup S_\alpha \subset \bigcup_{k=0}^r \tau^{-k}(\bigcup S'_\alpha) .$$

La proposition en résulte.

**Définition 6** Pour tout  $x_0 \in X$ , notons  $\mathcal{H}(x_0, m)$  l'ensemble des directions des hyperplans  $H_{\alpha, \beta}$  pour les  $\alpha$  tels que  $x_0 \in X_\alpha$ . Nous appelons ces directions les pentes de  $(m, f_1, \dots, f_p)$  au voisinage de  $x_0$ .

Suivant la proposition 9,  $\cup_{x_0 \in X_\alpha} S_\alpha$  est la variété des zéros de l'idéal de Bernstein de  $(m, f_1, \dots, f_p)$ . Nous en déduisons :

**Corollaire 7** Si un produit de formes linéaires affines appartient à  $\mathcal{B}(m, x_0, f_1, \dots, f_p)$ , tout hyperplan vectoriel de  $\mathcal{H}(x_0, m)$  est direction de l'un des facteurs. De plus, il existe dans  $\mathcal{B}(m, x_0, f_1, \dots, f_p)$  un produit de formes linéaires affines dont les directions sont exactement l'ensemble  $\mathcal{H}(x_0, m)$  des pentes de  $(m, f_1, \dots, f_p)$  au voisinage de  $x_0$ .

**Preuve :** Pour le premier point, il suffit d'observer que si  $b \in \mathcal{B}(m, x_0, f_1, \dots, f_p)$ , il s'annule sur les  $S_\alpha$  intervenant dans la proposition 19, donc sur ceux de dimension  $p - 1$  dont les directions sont les directions des hyperplans de  $\mathcal{H}$ . Pour le deuxième point, il suffit de prendre un produit de formes linéaires nulles sur les  $S_\alpha$  intervenant dans la proposition 19 et d'utiliser la proposition 9.

**Corollaire 8** La variété des zéros de  $\mathbf{in} \mathcal{B}(m, x_0, f_1, \dots, f_p)$  l'idéal engendré par les parties homogènes de plus haut degré des éléments de  $\mathcal{B}(m, x_0, f_1, \dots, f_p)$  est la réunion des pentes de  $(m, f_1, \dots, f_p)$  au voisinage de  $x_0$ . La racine de  $\mathbf{in} \mathcal{B}(m, x_0, f_1, \dots, f_p)$  est en particulier un idéal principal.



**Preuve :** Résulte du corollaire 7.

**Proposition 20** Soit  $x_0 \in X$ . Si le  $\mathcal{D}_{X,x_0}[s_1, \dots, s_p]$ -module :

$$\frac{\mathcal{D}_{X,x_0}[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}}{\mathcal{D}_{X,x_0}[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1+1} \dots f_p^{s_p+1}}$$

est un module pur de grade  $\dim X + 1$ , la racine de l'idéal de Bernstein  $\mathcal{B}(m, x_0, f_1, \dots, f_p)$  est principal. C'est notamment le cas sous la condition :

$$\text{Ext}_{\mathcal{D}_{X,x_0}[s_1, \dots, s_p]}^i(\text{Ext}_{\mathcal{D}_{X,x_0}[s_1, \dots, s_p]}^i(\frac{\mathcal{D}_{X,x_0}[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}}{\mathcal{D}_{X,x_0}[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1+1} \dots f_p^{s_p+1}}, \mathcal{D}_{X,x_0}[s_1, \dots, s_p])) \neq 0 \implies i = \dim X + 1 .$$

**Preuve :** Cela résulte de la remarque 5 et du corollaire 6. La deuxième partie de la proposition est un critère de pureté (voir [Bj2], Appendice IV, proposition 2.6).

Pour terminer ce paragraphe, considérons l'application :

$$\exp^{2i\pi} : \mathbf{C}^p \longrightarrow (\mathbf{C}^*)^p, \quad (s_1, \dots, s_p) \longmapsto (e^{2i\pi s_1}, \dots, e^{2i\pi s_p}) .$$

**Corollaire 9** L'image par l'application  $\exp^{2i\pi}$  de la variétés des zéros de  $\mathcal{B}(m, x_0, f_1, \dots, f_p)$  est une réunion de sous-ensembles de  $(\mathbf{C}^*)^p$  où chaque sous-ensemble est défini par une équation du type :

$$(\sigma_1)^{a_1} \dots (\sigma_p)^{a_p} = \alpha$$

où  $(a_1, \dots, a_p)$  est une famille d'éléments de  $\mathbf{N}$  premier entre eux et  $\alpha$  un nombre complexe. L'ensemble des  $(a_1, \dots, a_p)$  est l'ensemble des coefficients d'équations des pentes de  $(m, f_1, \dots, f_p)$  au voisinage de  $x_0$ .

**Preuve :** Cela se déduit de la proposition 19. En effet, si  $a_1 s_1 + \dots + a_p s_p = a$  où  $(a_1, \dots, a_p)$  est une famille d'éléments de  $\mathbf{N}$  premier entre eux et  $a$  un nombre complexe est l'équation d'un hyperplan affine  $H$ , les images par  $\exp^{2i\pi}$  des  $\tau^k(H)$  pour  $k \in \mathbf{Z}$  coïncident et ont pour équation :

$$(\sigma_1)^{a_1} \dots (\sigma_p)^{a_p} = e^{2i\pi a}$$

Ce résultat répond à une question de N. Budur [Bu] posée pour le cas particulier  $M = \mathcal{O}_X$ .

### 3.3.2 Cas où $m$ est une section d'un Module holonome régulier

Nous supposons maintenant que  $M = \mathcal{D}_X m$  est un module holonome régulier de variété caractéristique  $\Lambda$ . Notons  $F$  le produit  $f_1 \cdots f_p$  et désignons par  $W_{f_1, \dots, f_p, \Lambda}^\sharp$  l'adhérence dans  $T^*X \times \mathbf{C}^p$  de

$$\Omega = \left\{ (x, \xi + \sum_{i=1}^p s_i \frac{df_i(x)}{f_i(x)}, s_1, \dots, s_p) ; s_i \in \mathbf{C}, (x, \xi) \in \Lambda \text{ et } F(x) \neq 0 \right\}.$$

Nous avons établi les résultats suivants avec J. Briançon et M. Merle dans [B-M-M1] :

1. Les fibres réduites de la restriction de  $\pi_2$  à  $W_{f_1, \dots, f_p, \Lambda}^\sharp$  sont des sous-espaces lagrangiens de  $T^*X$ . La fibre au-dessus de l'origine est un sous-espace lagrangien conique notée  $W_{f_1, \dots, f_p, \Lambda}^\sharp(0)$ .
2. Les composantes irréductibles de  $W_{f_1, \dots, f_p, \Lambda}^\sharp \cap F^{-1}(0)$  sont toutes de dimension  $\dim X + p - 1$ . Leurs projections par  $\pi_2$  sont des hyperplans vectoriels de  $\mathbf{C}^p$  dont les équations sont des formes linéaires à coefficients entiers positifs ou nuls. Plus précisément, si  $G$  une composante irréductible de  $W_{f_1, \dots, f_p, \Lambda}^\sharp \cap F^{-1}(0)$ , si  $n_j$  désigne la multiplicité de  $f_j$  le long de  $G$ ,  $\pi_2(G)$  est l'hyperplan de  $\mathbf{C}^p$  d'équation :  $n_1 s_1 + \cdots + n_p s_p = 0$ .

**Définition 7** Nous appelons pentes de  $(\Lambda, f_1, \dots, f_p)$  les hyperplans vectoriels obtenus par projection par  $\pi_2$  des composantes irréductibles de  $W_{f_1, \dots, f_p, \Lambda}^\sharp \cap F^{-1}(0)$ . Pour tout  $x_0 \in X$ , nous notons  $\mathcal{H}(\Lambda, x_0, f_1, \dots, f_p)$  l'ensemble de ces pentes au voisinage de  $x_0$ .

Avec l'aide d'un résultat de C. Sabbah sur les variété caractéristiques d'un module relatif engendrant un module holonome régulier (théorème 3.2, [S2]), nous avons établi avec J. Briançon et M. Merle dans [B-M-M3] les résultats suivants :

**Proposition 21** (voir théorème 2.1, 2.4 et 2.6, [B-M-M3]) Soit  $M$  un  $\mathcal{D}_X$ -Module holonome régulier  $M$  de variété caractéristique  $\Lambda$  et  $m$  une section de  $M$  engendrant  $M$ . Alors,

1.  $\text{car}^\sharp(\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1} \cdots f_p^{s_p}) = W_{f_1, \dots, f_p, \Lambda}^\sharp,$

$$2. \text{ car}^\sharp \left( \frac{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}}{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1+1} \dots f_p^{s_p+1}} \right) = W_{f_1, \dots, f_p, \Lambda}^\sharp \cap F^{-1}(0) .$$

3. pour tout  $c = (c_1, \dots, c_p) \in \mathbf{C}^p$  :

$$\text{car}^\sharp \left( \frac{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}}{\sum_{j=1}^p (s_j - c_j) \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1+1} \dots f_p^{s_p+1}} \right) = W_{f_1, \dots, f_p, \Lambda}^\sharp(0) .$$

Nous déduisons des propositions 11, 12 et 13

**Proposition 22** Soit  $M = \mathcal{D}_X m$  un module holonome régulier de variété caractéristique  $\Lambda$ .

$$\text{car}^{\text{rel}}(\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}) = W_{f_1, \dots, f_p, \Lambda}^\sharp(0) \times \mathbf{C}^p .$$

**Proposition 23** Soit  $M = \mathcal{D}_X m$  un module holonome régulier de variété caractéristique  $\Lambda$ . Il existe un polynôme de Bernstein de  $m, f_1, \dots, f_p$  au voisinage de  $x_0$  non nul qui soit produit de formes linéaires dont l'ensemble des directions vectorielles est exactement  $\mathcal{H}(\Lambda, x_0, f_1, \dots, f_p)$ .

Cette proposition avait été obtenu pour  $p = 2$  dans [B-M-M3] théorème 3.2.

**Preuve :** Suivant C. Sabbah, considérons un  $b_S \in \mathcal{B}(m, x_0, f_1, \dots, f_p)$  non nul produit de formes linéaires affines à coefficients rationnels. Ecrivons  $b_S = c_1 c_2$  où  $c_1$  (resp.  $c_2$ ) est produit de formes linéaires affines de directions vectorielles formées par de pentes de  $\mathcal{H}(\Lambda, x_0, f_1, \dots, f_p)$  (resp. non formées). Nous avons vu qu'au voisinage de  $x_0$  :  $b_S(s - r) \dots b_S(s) \tilde{L} \subset \tau(\tilde{L})$ . Nous en déduisons que le sous-Module :

$$c_1(s - r) \dots c_1(s) \frac{\tilde{L}}{\tau(\tilde{L})} \subset \tilde{L} / \tau(\tilde{L})$$

est annulé par  $c_2(s - r) \dots c_2(s)$ . Il en résulte :

$$\text{car}^\sharp(c_1(s - r) \dots c_1(s) \frac{\tilde{L}}{\tau(\tilde{L})}) \subset W_{f_1, \dots, f_p, \Lambda}^\sharp \cap F^{-1}(0) \cap (\text{in } c_2)^{-1}(0)$$

qui est de dimension strictement inférieure à  $\dim X + p - 2$ . Comme  $\tilde{L}/\tau(\tilde{L})$  est pur de grade  $\dim X + 1$ , il s'en suit :

$$c_1(s_1 - r, \dots, s_p - r) \cdots c_1(s_1, \dots, s_p) \frac{\tilde{L}}{\tau(\tilde{L})} = 0 .$$

Posons  $b_1(s) = c_1(s - r) \cdots c_1(s)$ , nous obtenons :

$$b_1(s + r) \cdots b_1(s) \in \mathcal{B}(m, x_0, f_1, \dots, f_p) .$$

Comme  $b_1(s + r) \cdots b_1(s)$  est produit de formes linéaires affines de directions vectorielles formées par des pentes de  $\mathcal{H}(\Lambda, x_0, f_1, \dots, f_p)$ , nous avons montré l'existence dans  $\mathcal{B}(m, x_0, f_1, \dots, f_p)$  d'un tel polynôme non nul. Inversement, la partie homogène de plus haut degré de ce polynôme s'annule sur  $W_{f_1, \dots, f_p, \Lambda}^\# \cap F^{-1}(0)$  au voisinage de  $x_0$  et donc sur toutes les pentes de  $\mathcal{H}(\Lambda, x_0, f_1, \dots, f_p)$ .

Si  $c(s_1, \dots, s_p)$  est un polynôme, désignons par  $\text{in } c$  la partie homogène de  $c$  de plus haut degré. Si  $b$  appartient à l'idéal de Bernstein de  $m, f_1, \dots, f_p$  au voisinage de  $x_0$ ,  $\text{in } b$  s'annule sur

$$\text{car}^\# \left( \frac{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1} \cdots f_p^{s_p}}{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1+1} \cdots f_p^{s_p+1}} \right) .$$

Il résulte de la proposition 21 que  $\text{in } b$  s'annule sur  $\mathcal{H}(\Lambda, x_0, f_1, \dots, f_p)$ .

La proposition 23 permet de montrer que les pentes  $\mathcal{H}(x_0, m)$  de  $(m, f_1, \dots, f_p)$  au voisinage de  $x_0$  ne sont autres que  $\mathcal{H}(\Lambda, x_0, f_1, \dots, f_p)$  l'ensemble de ces pentes au voisinage de  $x_0$ . Ainsi, nous obtenons :

**Proposition 24** *Soit  $M = \mathcal{D}_X m$  un module holonome régulier de variété caractéristique  $\Lambda$ . Au voisinage de tout  $x_0 \in X$ , il existe  $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$  (resp.  $S_\alpha$ ) une famille finie de sous-espaces analytiques (resp. variétés algébriques de  $\mathbf{C}^p$ ) telle que*

$$\text{car}^{\text{rel}} \left( \frac{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1} \cdots f_p^{s_p}}{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1+1} \cdots f_p^{s_p+1}} \right) = \cup_{\alpha \in A} T_{X_\alpha}^* X \times S_\alpha .$$

*avec les conditions*

- Chaque variété algébrique  $S_\alpha$  est de dimension  $p - 1$ .
- Les composantes irréductibles de dimension  $p - 1$  de chaque  $S_\alpha$  sont des hyperplans affines  $H_{\alpha,\beta}$  de directions les noyaux de formes linéaires à coefficients premiers entre eux dans  $\mathbf{N}$ .
- Toute composante irréductible des  $S_\alpha$  de dimension strictement inférieure à  $p - 1$  est contenue dans un hyperplan affine  $\tau^k(H_{\alpha,\beta})$  où  $k \in \mathbf{Z}$  et  $\tau$  la translation  $(s_1, \dots, s_p) \mapsto (s_1 + 1, \dots, s_p + 1)$ .
- l'ensemble des directions des hyperplans affines  $H_{\alpha,\beta}$  pour  $x_0 \in X_\alpha$  est l'ensemble  $\mathcal{H}(\Lambda, x_0, f_1, \dots, f_p)$ .

**Corollaire 10** Soit  $M = \mathcal{D}_X m$  un module holonome régulier de variété caractéristique  $\Lambda$ . La variété des zéros de  $\mathbf{in} \mathcal{B}(m, x_0, f_1, \dots, f_p)$  l'idéal engendré par les parties homogènes de plus haut degré des éléments de  $\mathcal{B}(m, x_0, f_1, \dots, f_p)$  est la réunion des pentes de  $(\Lambda, f_1, \dots, f_p)$  au voisinage de  $x_0$ .

**Preuve :** Si  $b \in \mathcal{B}(m, x_0, f_1, \dots, f_p)$ ,  $\mathbf{in} b$  la partie homogène de plus haut degré de  $b$  s'annule sur la variété caractéristique dièse de

$$\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p} / \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1+1} \dots f_p^{s_p+1}$$

et donc, suivant la proposition 21, s'annule sur  $W_{f_1, \dots, f_p, \Lambda}^\# \cap F^{-1}(0)$ . Il en résulte une inclusion. L'autre inclusion est donnée par la proposition 23.

Enfin, nous avons :

**Corollaire 11** Soit  $M = \mathcal{D}_X m$  un module holonome régulier de variété caractéristique  $\Lambda$ . L'image par l'application  $\exp^{2i\pi \cdot}$  de la variétés des zéros de  $\mathcal{B}(m, x_0, f_1, \dots, f_p)$  est une réunion de sous-ensembles de  $(\mathbf{C}^*)^p$  où chaque sous-ensemble est défini par une équation dun type

$$(\sigma_1)^{a_1} \dots (\sigma_p)^{a_p} = \alpha$$

où  $\alpha$  est un nombre complexe et  $(a_1, \dots, a_p)$  ( $a_1, \dots, a_p$ ) est une famille d'éléments de  $\mathbf{N}$  premier entre eux. Cette famille est exactement la famille des coefficients des formes linéaires dont les des zéros sont les pentes de  $(\Lambda, f_1, \dots, f_p)$  au voisinage de  $x_0$ .

## Références

- [A-B] Auslander M., Bridger M., Stable Module Theory, Memoirs of the American Mathematical Society, (1969) vol. 94.
- [B] Bernstein J., The analytic continuation of generalized functions with respect to a parameter, *Funct. An. and Appl.* 6 (1972), 273-285
- [Bj2] Björk J.-E., Analytic D-Modules and Applications, Mathematics and Its Applications, Kluwer Academic Publisher, Vol. 247 (1993).
- [B.May] Briançon J., Maynadier H. Transversalité de l'idéal de Bernstein-Sato, *Journal of Mathematics of Kyoto University*, Vol. 39, N 2, 1999.
- [B-M-M1] Briançon J., Maisonobe Ph., Merle M., Constructibilité de l'idéal de Bernstein, *Advanced Studies in Pure Mathematics* 29, Singularities - Sapporo 1998 (2000) 79-95.
- [B-M-M2] Briançon J., Maisonobe Ph., Merle M., Éventails associés à des fonctions analytiques, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics* 238 (2002) 61-71.
- [B-M-M3] Briançon J., Maisonobe Ph., Merle M., Equations fonctionnelles associées à des fonctions analytiques, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics* 238 (2002) 77-87.
- [Bo.AC] Bourbaki, *Eléments de mathématiques, Algèbre Commutative*, Springer.
- [Bu] Budur N. Bernstein-Sato ideals and local systems. *Ann. Inst. Fourier* 64 (2015).
- [B] Brownawell D, Bounds for the degree in the Nullstellensatz, *Annals of Mathematics*, 126, 1987, 577-591.
- [Ga] Gabber O. , The integrability of the characteristic variety, *Amer. J. Math.* 103 (1981), no. 3, 445-468.
- [G-M] Granger M. , Maisonobe Ph. D-Modules cohérents et holonomes, *A Basic Course On Differential Modules*, Travaux en Cours 45, Hermann (1993).
- [H] Hermann G, Die Frage der endlich vielen Schritte in der Theorie der Polynomideale, *Mathematische Annalen*, Volume 95, Number 1, 736-788, (1926).
- [K1] Kashiwara M., B-functions and holonomic systems, *Invent. Math.* 38 (1976) 33-53.
- [K2] Kashiwara M. Algebraic Study of Systems of Partial Differential Equations *Mémoires de la Société Mathématique de France*, Numéro 63, 1995.

- [K-K] Kashiwara M., Kawai T., On holonomics System for  $\prod_{i=1}^N (f_i + \sqrt{-1}0)^{\lambda_i}$ , Publ. RIMS, Kyoto Univ. 15 (1979), 551-575.
- [G-M] Granger M., Maisonobe Ph. D-Modules cohérents et holonomes, A Basic Course On Differential Modules, Travaux en Cours 45, Hermann (1993).
- [Go] Gyoja A. Bernstein-Sato's polynomial, for several analytic functions, Journal Mathematics Kyoto University, 33-2, 1993, 399-411.
- [L] Loeser F. Fonctions zêta locales d'Igusa à plusieurs variables, intégration dans les fibres et discriminants, Annales Scientifiques de l'ENS, 4 ème série, tome 22, n 3, 1989, p 435-471.
- [M-N] Mebkhout Z., Narvaez-Macarro L. La théorie du polynôme de Bernstein-Sato pour les algèbres de Tate et de Dwork-Monsky-Wasnnitzer, Annales Scientifiques de l'ENS, 4 ème série, tome 24, 1991, p 227-256.
- [Ma] Matsumura H., Commutative Algebra Second Edition, the Benjamin/Cummings Publishing Company, Mathematics Lecture Note Series, Advanced Book Program (1980).
- [Mai] Maisonobe Ph., Cycles évanescents algébriques et topologiques par un morphisme sans pente, Journal of Singularities, Volume 7 (2013), 157-189.
- [Re] Rees D. , The grade of a ideal or module, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, p. 28 à 42 (1953).
- [Se] Serre J.-P., Algèbre Locale et Multiplicités, Lecture Notes in Mathematics 11 , second edition 1965.
- [S1] Sabbah C., Proximité évanescence, I. La structure polaire d'un  $\mathcal{D}$ -Module, Compositio Mathematica 62 (1987) 283–328.
- [S2] Sabbah C., Proximité évanescence, II. Équations fonctionnelles pour plusieurs fonctions analytiques, Compositio Mathematica 64 (1987) 213-241.
- [S3] Sabbah C., Polynomes de Bersntein-Sato à plusieurs variables, Séminaire Equations aux Dérivées Partielles de l'Ecole Polytechnique, (1986-1987), exp. 19, p. 1-6.